UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❑❑◆❑❑
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

22G26NA0152
Durée : 4 heures
Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (04 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$, puis en déduire le module de a. **0,5+0,5 pt**
2. Ecrire a^2 sous forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$. **0,5+0,5 pt**
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. **01 pt**
4. Représenter sur le même graphique les points images de $a, -a$ et a^2. **01 pt**

EXERCICE 2 : (04 pts)

On jette trois fois de suite un dé non truqué à six faces portant les chiffres allant de 1 à 6. On lit les numéros des faces supérieures et on les note dans cet ordre a, b, c. Puis on forme l'équation du second degré $(E) : ax^2 + bx + c = 0$. On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire.

1. Soit A l'événement : « -1 est solution de (E) et $b = 6$ ».
   Justifier que la probabilité de l'événement A est $p(A) = \frac{5}{216}$. **0,5 pt**
2. On considère les événements suivants :
   B: « -2 est solution de (E) et $c = 4$ ».
   C: « la somme des solutions est -2 et leur produit est 1 ».
   D: « les deux solutions sont confondues et $b = 4$ ».
   La probabilité de chacun des événements B, C et D appartient à l'ensemble $I = \left\{\frac{1}{72}; \frac{1}{108}; \frac{1}{54}\right\}$.
   Donner la probabilité de chacun des événements B, C et D en le justifiant. **01,5 pt**
3. L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite et de façon indépendante.
   a) Soit F l'événement : " L'événement A se réalise une seule fois au 3ème essai".
      Montrer que la probabilité de l'événement F est $p(F) = \frac{5\times(211)^9}{(216)^{10}}$. **0,5 pt**
   b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves.
   b-1) Déterminer la loi de probabilité de Y. **0,5 pt**
   b-2) Montrer que le nombre espéré de réalisations de A est égal à $\frac{25}{108}$. **0,5 pt**
   b-3) Calculer la variance de Y. **0,5 pt**

Epreuve du 1er groupe

PROBLEME : **(12 points)**

A. Soient la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + x - x\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère othonormal $(O;\, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2cm.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f = \,]0, +\infty[$ · **0,5 pt**
2. Etudier la continuité de f en 1 · **0,5 pt**
3. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus. **1,25 pt**
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. **0,75 pt**
5. Montrer que f admet un prolongement par continuité à droite en 0 et définir ce prolongement h. **0,5 pt**
6. Etudier la dérivabilité de h à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat. **0,5 pt**
7. Calculer $f'(x)$ dans chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. **01 pt**
   Dresser le tableau de variations de f · **01 pt**
8. a. Tracer (C_f) · **01 pt**
   b. Calculer l'aire A en cm^2 de la partie du plan comprise entre (C_f), la droite d'équation $y = 1$, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = 4$. **01 pt**

B. 1. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$ ·
En déduire un encadrement de α à 10^{-1} près. **01,25 pt**

b. Montrer que : $\forall\, x \in [1, +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ · **0,5 pt**

c. En déduire que : $\forall\, x \in [1, +\infty[, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. **0,25 pt**

2. Soit (W_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{W_n}}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

a. $W_n \geq 1$ · **0,75 pt**

b. $|W_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|W_n - \alpha|$ · **0,25 pt**

c. $|W_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |W_0 - \alpha|$ · **0,75 pt**

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$. **0,25 pt**