Séries : S1-S1A-S3

**Epreuve du 1er groupe**

**PARTIE D (02,5 points)**

1. En utilisant la relation $(\mathbf{E_1})$, montrer que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\mathrm{I}_{n+2}(y) = \mathrm{I}_n(y) - \frac{1}{n+1}y^{n+1} \qquad (\mathbf{E_2}).$$ **0,5 pt**

2. En déduire que pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$\begin{cases} \mathrm{I}_{2p}(y) = t_y - \sum_{q=0}^{p-1} \frac{1}{2q+1} y^{2q+1} & (\mathbf{E_3}) \\ \mathrm{I}_{2p+1}(y) = f_1(t_y) - \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{2q} y^{2q} & (\mathbf{E_4}) \end{cases}.$$ **1 pt**

3. Montrer que tout $y \in ]-1\,,1[$, $t_{-y} = -t_y$ · **0,5 pt**

4. Pour tout réel $y$ de l'intervalle$]-1\,,1[$ et pour tout entier naturel $n$, on pose : $\mathrm{J}_n(y) = \int_{t_{-y}}^{t_y} [f_1{}'(u)]^n du$.

Montrer que si $n$ est pair, $\mathrm{J}_n(y) = 2\mathrm{I}_n(y)$ et que si $n$ est impair, $J_n(y) = 0$. **0,5 pt**



□□□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
**E.mail : office@ucad.edu.sn**
**Site web : officedubac.sn**

Durée: 4Heures

Séries :S1-S1A-S3-coef 8

**Epreuve du 1er groupe**

# MATHEMATIQUES

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).**

**EXERCICE 1 : (05 points)**

Le plan complexe $\mathbb{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par $A$ le point d'affixe 1.

1. Soient $f$ l'application du plan dans lui-même définie par $f = t_{2\overrightarrow{OA}} \circ S_O \circ S_{(OA)}$ où $S_{(OA)}$ est la réflexion d'axe $(OA)$, $S_O$ la symétrie centrale de centre $O$ et $t_{2\overrightarrow{OA}}$ la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$.

A tout point M d'affixe $z$, on associe le point M' d'affixe $z'$ tel que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$.

**a)** Donner l'écriture complexe de $t_{2\overrightarrow{OA}}$ , puis les expressions analytiques de $S_O$ et de $S_{(OA)}$. **0,75 pt**

**b)** En déduire que l'expression analytique de $f$ est : $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y \end{cases}$. **0,5 pt**

**c)** Montrer que $z' = -\overline{z} + 2$. **0, 25 pt**

**d)** Montrer que $f$ est une isométrie puis déterminer l'écriture complexe de sa réciproque. **0,5 pt**

**e)** Déterminer l'ensemble E des points invariants par $f$. **0,5 pt**

**f)** En déduire la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $f$. **0,5 pt**

2. On désigne par $O'$ l'image de $O$ par $t_{2\overrightarrow{OA}}$. Soient $(D_1)$ la droite passant par $O$ dont un vecteur directeur $\overrightarrow{e_1}$ est tel que $(\vec{u},\overrightarrow{e_1}) = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ et $(D_2)$ la parallèle à $(D_1)$ passant par $O'$.

**a)** Déterminer une équation cartésienne de $(D_2)$ et l'ordonnée du point $\Omega$ d'abscisse 1 de $(D_2)$. **0,5 pt**

**b)** Sans utiliser l'écriture complexe de $f \circ S_{(D_2)}$, déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de la transformation $f \circ S_{(D_2)}$ où $S_{(D_2)}$ est la réflexion d'axe $(D_2)$. **0,5 pt**

**c)** Soit $g$ l'application du plan dans lui-même définie par $g = r_{O'} \circ t_{2\overrightarrow{OA}}$ où $r_{O'}$ est la rotation de centre $O'$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ·

i. Sans utiliser l'écriture complexe de $g$, donner la nature $g$. **0,5 pt**

ii. A tout point M d'affixe $z$, on pose $\mathrm{M}' = g(\mathrm{M})$ et $z'$ l'affixe de M'.

Montrer que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$, puis déterminer les éléments géométriques caractéristiques de $g$. **0,5 pt**

**EXERCICE 2 :** **(04 points)**

**PARTIE A**

On considère l'équation (E) : $7x - 3y = 1$ où $x$ et $y$ sont des entiers naturels.

1. Déterminer le réel $a$ tel que le couple $(1\,, a)$ soit solution de (E). **0,25 pt**
2. Résoudre (E). **0,5 pt**

**PARTIE B**

Dans cette partie on se propose de déterminer les couples $(n, m)$ d'entiers naturels non nuls solutions de l'équation: $7^n - 3 \times 2^m = 1$ **(F)**.

1. Montrer que si le couple $(n, m)$ est solution de **(F)** alors il existe un entier naturel $k$ tel que : $7^{n-1} = 1 + 3k$ et $2^m = 2 + 7k$. **0,5 pt**
2. Montrer que si $m \leq 4$ alors l'équation **(F)** a deux couples solutions. **0,25 pt**
3. On suppose maintenant $m \geq 5$.
   - **a)** Montrer que si le couple $(n, m)$ est solution de **(F)** alors : $7^n \equiv 1[32]$ et $2^m \equiv 0[32]$. **0,5 pt**
   - **b)** Compléter le tableau suivant. **0,5 pt**

| $n$ est égal à | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $7^n$ | $\equiv$ ... [32] | $\equiv$ ... [32] | $\equiv$ ... [32] | $\equiv$ ... [32] | $\equiv$ ... [32] |

   - **c)** En déduire que si le couple $(n, m)$ vérifie la relation **(F)**, alors $n$ est divisible par 4. **0,5 pt**
   - **d)** Montrer que si le couple $(n, m)$ est solution de **(F)** alors $7^n \equiv 1[5]$. **0,5 pt**
   - **e)** Montrer alors que pour $m \geq 5$, il n'existe pas de couple $(n, m)$ d'entiers naturels non nuls solution de **(F).** **0,25 pt**
4. Déterminer alors l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls qui sont solutions de **(F)**. **0,25 pt**

**PROBLEME :** **(11 points)**

**PARTIE A** **(02,5 points)**

Soit $a$ un réel strictement positif. On désigne par $g_a$ une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $g'_a$ vérifiant les propriétés suivantes :

**(P1)** Pour tout nombre réel $x$, $\left(g'_a(x)\right)^2 - a^2\left(g_a(x)\right)^2 = -1$ ;

**(P2)** $g'_a(0) = 0$ ;

**(P3)** $g'_a$ est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



1. On suppose qu'il existe une fonction $g_a$ vérifiant les propriétés **(P1), (P2) et (P3).**
   - **a)** Calculer $g_a(0)$. **0,25 pt**
   - **b)** Démontrer que, pour tout nombre réel $x$ non nul, $g'_a(x) \neq 0$. **0,5 pt**
   - **c)** En utilisant la propriété **(P1)** montrer que pour tout réel $x$ non nul, on a : $g''_a(x) = a^2 g_a(x)$. **0,5 pt**
   - **d)** En déduire que pour tout réel $x$, $g_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$. **0,75 pt**

**2.** Montrer que la fonction $g_a$ définie par $g_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ où $a$ est un réel strictement positif est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $g'_a$ vérifie les propriétés **(P1), (P2) et (P3).** **0,5 pt**

**PARTIE B** **(02,5 points)**

Soient $a$ un réel strictement positif, $f_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \ln\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}\right)$ et $(C_a)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etudier la parité de $f_a$, ses variations et établir son tableau de variations. **1,5 pt**
2. Etudier les branches infinies de $(C_a)$. **0,5 pt**
3. Tracer la courbe $(C_1)$. **0,5 pt**

**PARTIE C** **(03,75 points)**

1. Montrer que pour tout réel $x$, on a :
   - **a)** $|f_1'(x)| < 1$. **0,5 pt**
   - **b)** $f_1''(x) = 1 - [f_1'(x)]^2$ $(\boldsymbol{E_1})$ **0,5 pt**
2. Montrer que pour tout $y \in ]-1\,,1[$, l'équation $f_1'(x) = y$ admet une solution unique notée $t_y$ puis exprimer $t_y$ en fonction de $y$. **1 pt**

Pour tout $y \in ]-1\,,1[$ , on pose, pour tout entier naturel $n$ : $\mathrm{I}_n(y) = \int_0^{t_y}(f_1'(u))^n du$.

On convient que pour tout réel $u$, $(f_1'(u))^0 = 1$.

3. On suppose ici que $y \in [0\,,1[$.
   - **a)** Justifier que $\mathrm{I}_n(y)$ existe. **0,25 pt**
   - **b)** Calculer $\mathrm{I}_0(y)$ et $\mathrm{I}_1(y)$. **0,75 pt**
   - **c)** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leq \mathrm{I}_n(y) \leq t_y \times y^n$. **0,5 pt**
   - **d)** En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n(y))_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite. **0,25 pt**