UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2022 G 18 BIS A N°1
Durée : 4 heures
Séries : S1-SA-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

CORRIGE

EXERCICE 1 : (*5 points*)

Le plan complexe $\mathbb{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| =$ 4 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1. *On considère l'application f du plan définie par $f = t_{2\overrightarrow{OA}} \circ S_O \circ S_{(OA)}$ avec $S_{(OA)}$ la réflexion d'axe (OA), S_O la symétrie centrale de centre O et $t_{2\overrightarrow{OA}}$ la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$.*
A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$.

a) *Donnons l'écriture complexe de $t_{2\overrightarrow{OA}}$ puis les expressions analytiques de S_O et de $S_{(OA)}$.*

- *L'écriture complexe de $t_{2\overrightarrow{OA}}$*

$$t_{2\overrightarrow{OA}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = 2\overrightarrow{OA}$$
$$z' - z = 2z_A$$

D'où $\boldsymbol{t_{2\overrightarrow{OA}} : z' = z + 2}$ **(*0,5pt*)**

- *L'expression analytique de S_O*

$$S_O(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \begin{cases} \boldsymbol{x' = -x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}.$$
(*0,25pt*)

- *L'expression complexe de $S_{(OA)}$*

$$S_{(OA)}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \begin{cases} \mathrm{OM}' = \mathrm{OM} \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = 0 \end{cases}$$

D'où $\boldsymbol{S_{(OA)}} : \begin{cases} \boldsymbol{x' = x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}.$ **(*0,25pt*)**

b) *Déduisons-en que l'expression analytique de f est :* $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y \end{cases}.$

$$S_O \circ S_{(OA)} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \text{ or } t_{2\overrightarrow{OA}} : z' = z + 2 \quad : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \end{cases}$$

Donc $\boldsymbol{f = t_{2\overrightarrow{OA}} \circ S_O \circ S_{(OA)}} : \begin{cases} \boldsymbol{x' = -x + 2} \\ \boldsymbol{y' = y} \end{cases}.$ **(*0,5pt*)**

c) *Montrons que $z' = -\overline{z} + 2$.*

On a : $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = y \end{cases}$

$$x' + iy' = -x + 2 + iy = -(x - iy) + 2 = -\overline{z} + 2$$

D'où $\boldsymbol{z' = -\overline{z} + 2}$. **(*0,5pt*)**

d) *Montrons que f est une isométrie puis déterminons l'expression complexe de sa réciproque.*

➢ Soit M et N deux points distincts du plan tels que :

$f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \quad \Leftrightarrow \quad z_{M'} = -\bar{z}_M + 2$

$f(\mathrm{N}) = \mathrm{N}' \quad \Leftrightarrow \quad z_{N'} = -\bar{z}_N + 2$

$$\begin{cases} \mathrm{NM} = |z_M - z_N| \\ \mathrm{N'M'} = |z_{M'} - z_{N'}| = |-\bar{z}_M + \bar{z}_N| = |z_M - z_N| \end{cases}$$

C'est-à- dire $\mathbf{NM} = \mathbf{N'M'}$, par suite ***f* *est une isométrie***. **(*0,5pt*)**

Autre méthode : On peut aussi voir f comme la composée de trois isométries.

➢ L'application f est une isométrie ; elle est donc bijective. Déterminons l'écriture complexe de sa réciproque.

$$\boldsymbol{z' = -\overline{z} + 2} \Leftrightarrow z = -\overline{\boldsymbol{z'}} + \mathbf{2}$$

On en déduit que f^{-1} a pour eriture complexe : $z' = -\,\overline{z}\, + 2$

e) *Déterminons l'ensemble E des points invariants par f.*

Soit *M* un point du plan. M est invariant par f signifie que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

$f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \Leftrightarrow z = -\,\overline{z}\, + 2$,

$\Leftrightarrow z + \overline{z} = 2$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 2$

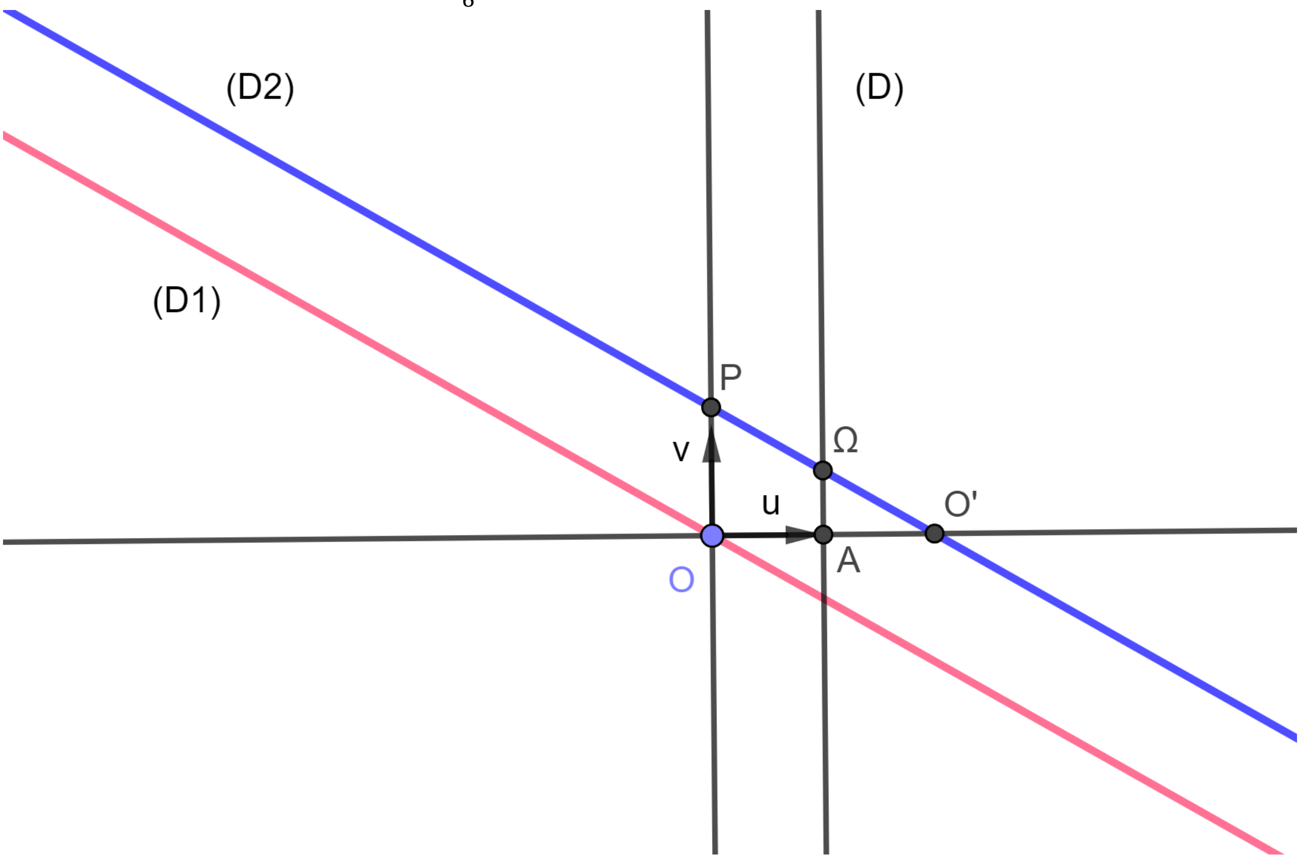
$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 1.$

L'ensemble E des points invariants par *f* est la droite (D) : $\boldsymbol{x = 1}$ **(*0,5pt*)**

f) *Déduisons la nature de f.*

L'application f est une isométrie du plan dont l'ensemble des points invariants est la droite (D) : $x = 1$. Elle est donc la symétrie orthogonale d'axe (D) : $x = 1$. **(*0,5pt*)**

2. *On désigne par* O' *l'image de O par* $t_{2\overrightarrow{OA}}$, (D_1) *la droite passant par* O *dont un vecteur directeur* $\overrightarrow{e_1}$ *est tel que* $(\vec{u}, \overrightarrow{e_1}) = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ *et* (D_2) *la parallèle à* (D_1) *passant par* O'.



a) *Déterminons une équation cartésienne de* (D_2) *et l'ordonnée du point* Ω d'*abscisse* 1 *de* (D_2).

- On sait que (D_2) n'est pas parallèle a $(O, \vec{v})$.
  Posons $(D_2) : y = ax + b$.
  On a : $a = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) == -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  $t_{2\overrightarrow{OA}}(\mathrm{O}) = \mathrm{O}' \iff \overrightarrow{\mathrm{OO}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, d'où $\mathrm{O}'\binom{2}{0}$
  $\mathrm{O}'\binom{2}{0} \in (D_2) \iff 2a + b = 0$
  $\iff b = -2a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
  Donc $\boldsymbol{(D_2) : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}}$.
- *Coordonnée du point* Ω d'*abscisse* 1. $\boldsymbol{\Omega\left(1\,;\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$. **(*0,5pt*)**

b) *Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de la transformation* $f \circ S_{(D_2)}$.
$f \circ S_{(D_2)}$ est la composée de deux réflexions d'axes sécants par conséquent $\boldsymbol{f \circ S_{(D_2)}}$ est une **rotation**.
Son centre $\boldsymbol{\Omega}$ est le point d'intersection des droites (D) et (D_2).
Les droites (D_2) et (D) forment un angle $\left((D_2), (\mathrm{D})\right) = \frac{2\pi}{3}\ (\pi)$. On en déduit que l'angle de la rotation est $\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}\ (2\pi)$. **(*0,5pt*)**

c) *Soit* g *l'application du plan définie par* $g = r_{O'} \circ t_{2\overrightarrow{OA}}$ *avec* $r_{O'}$ *la rotation de centre* O' *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.

i. *Donnons la nature de* g.
g est la composée de deux déplacements d'angles respectifs 0 et $\frac{\pi}{3}$ par conséquent **g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc g est une rotation.** **(*0,5pt*)**

ii. *A tout point M d'affixe z, on pose* $M' = g(M)$ *et z' l'affixe de M'.*
Montrons que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

$g = r_{O'} \circ t_{2\overrightarrow{OA}}$
On a $r_{O'} : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1 - i\sqrt{3}$ et $t_{2\overrightarrow{OA}} : z' = z + 2$
$r_{O'} \circ t_{2\overrightarrow{OA}} : e^{i\frac{\pi}{3}}(z+2) + 1 - i\sqrt{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})1 - i\sqrt{3}$
$e^{i\frac{\pi}{3}}z + 1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$
D'où $\boldsymbol{g : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2}$. **(*0,5pt*)**

EXERCICE 2 : (*4 points*)

PARTIE A

On considère l'équation (E) : $7x - 3y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. *Déterminons le réel a tel que le couple* $(1\,,a)$ *soit solution de (E).*
   Le couple $(1\,,a)$ *solution de (E)* $\iff 7 - 3a = 1$
   $\iff \boldsymbol{a = 2}$
   Le couple $(1\,,2)$ est une solution de (E). **(*0,25pt*)**

2. *Résolvons (E).*

Soit (x, y) une solution quelconque de *(E)*.
On a alors $7x - 3y = 1$. On a aussi $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$.
On déduit de ces deux relations que $7(x-1) = 3(y-2)$ $(*)$.
Ainsi, 7 divise $3(y-2)$ et comme 7 est premier avec 3, 7 divise $y - 2$, d'après le théorème de Gauss. Il existe alors un entier k tel que $y - 2 = 7k$, i.e $y = 2 + 7k$.
La relation $(*)$ devient $7(x-1) = 3(2 + 7k - 2)$. Par suite, $x = 1 + 3k$
Vérifions que $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ le couple $(1 + 3k\ ;\ 2 + 7k)$ est solution

$$7(1+3k) - 3(2+7k) = 7 + 21k - 6 - 21k = 1$$

D'où **S** $= \{(\boldsymbol{1+3k}\ ;\ \boldsymbol{2+7k})\}$ $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$. **(*0,5pt*)**

PARTIE B

Dans cette partie on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :$7^n - 3 \times 2^m = 1$ **(F)**.

1. *Montrons que si le couple* (n, m) *est solution de* **(F)** *alors il existe un entier naturel* k *tel que* : $7^{n-1} = 1 + 3k$ et $2^m = 2 + 7k$.
   $7^n - 3 \times 2^m = 1 \iff 7 \times 7^{n-1} - 3 \times 2^m = 1$
   D'après la partie A en posant $\begin{cases} x = 7^{n-1} \\ y = 2^m \end{cases}$
   On obtient $\boldsymbol{7^{n-1} = 1 + 3k}$ **et** $\boldsymbol{2^m = 2 + 7k}$ **,** $\boldsymbol{k} \in$ **IN** **(*0,5pt*)**
2. *Montrons que si* $m \leq 4$ *alors l'équation* **(F)** *a deux couples solutions*.
   $7^n - 3 \times 2^m = 1$ **(F)**
   - Si $= 1$, $7^n = 7$ donc $n = 1$
   - Si $= 2$, $7^n = 13$ impossible
   - Si $= 3$, $7^n = 25$ impossible
   - Si $= 4$, $7^n = 49$ donc $n = 2$.

Les couples $(\mathbf{1}\,;\mathbf{1})$ **et** $(\mathbf{2}\,;\mathbf{4})$ **sont les solutions de (F) si** $\boldsymbol{m \leq 4}$.

Autre méthode

$m \leq 4 \Rightarrow 1 \leq m \leq 4$

$\Rightarrow 2 \leq 2^m \leq 16$

$\Rightarrow 2 \leq 2 + 7k \leq 16$
$\Rightarrow 0 \leq 7k \leq 14$
$\Rightarrow 0 \leq k \leq 2$

D'où $= 0$, $k = 1$, $k = 2$

- Si $k = 0$ alors $7^{n-1} = 1 \Rightarrow n - 1 = 0, n = 1$ et $2^m = 2$, $m = 1$.
- Si $k = 1$ alors $7^{n-1} = 4$ impossible
- Si $k = 2$ alors $7^{n-1} = 7 \Rightarrow n - 1 = 1, n = 2$ et $2^m = 16$, $m = 4$

Les couples $(\mathbf{1}\,;\mathbf{1})$ **et** $(\mathbf{2}\,;\mathbf{4})$ **sont les solutions de (F) si** $\boldsymbol{m \leq 4}$. **(*0,25pt*)**

3. *On suppose maintenant* $m \geq 5$.
   a) *Montrons que si le couple* (n, m) *vérifie la relation* **(F)** *alors* :
   $7^n \equiv 1[32]$ et $2^m \equiv 0[32]$.
   - $7^n - 3 \times 2^m = 1 \Leftrightarrow 7^n - 1 = 3 \times 2^m$
     $7^n \equiv 1[3 \times 2^m]$, or $\forall\, m \geq 5.\, m = 5 + q$, $q \in IN$.$2^5 = 32$
     $7^n \equiv 1[3 \times 2^5 \times 2^q]$
     $\boldsymbol{7^n \equiv 1[32]}$. **(*0,25pt*)**
   - $\forall\, m \geq 5.\, m = 5 + q$, $q \in$ IN
     $2^m = 2^5 \times 2^q$
     Or $2^5 \equiv 0[32]$ par conséquent $2^m \equiv 0[32]$ **(*0,25pt*)**

b) *Complétons le tableau suivant.* **(*0,5pt*)**

n est égal à	1	2	3	4	5
7^n	$\equiv 7[32]$	$\equiv 17[32]$	$\equiv 23[32]$	$\equiv 1[32]$	$\equiv 7[32]$

c) *Déduisons-en que si le couple (n, m) vérifie la relation* **(F)**, *alors n est divisible par* 4.
Si le couple (n, m) est solution, alors $\mathbf{7^n \equiv 1[32]}$.
On en déduit que $n = 4q$ avec $q \in \mathbb{N}$ **(*0,5pt*)**

d) *Montrons que si le couple (n, m) vérifie la relation* **(F)** *alors $7^n \equiv 1[5]$.*
$7^n - 3 \times 2^m = 1$
On sait que 4 divise n, donc $n = 4q$ avec $q \in \mathbb{N}$

$$7^2 \equiv -1[5] \Rightarrow 7^4 \equiv 1[5]$$
$$\Rightarrow \mathbf{7^{4q} \equiv 1}$$
$$\Rightarrow \mathbf{7^n \equiv 1[5]}.$$ **(*0,5pt*)**

e) *Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation* **(F).**
On a : ($7^n \equiv 1[5]$ et $7^n - 3 \times 2^m = 1$) $\Rightarrow$ $-3 \times 2^m \equiv 0[5]$
Or $m \geq 5$, $3 \times 2^m = 6 \times 2^{m-1}$ de plus $6 \equiv 1[5]$, donc $2^{m-1} \equiv 0[5]$
D'où 5 divise 2^{m-1} , ce qui est impossible.

Par suite il n'existe pas de couples (n, m) vérifiant *la* relation (F). **(*0,25pt*)**

4. *Déterminons alors l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation* **(F)**.
L'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation **(F)**

$$\mathbf{S} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{4})\}$$ **(*0,25pt*)**

PROBLEME : (11 points)

PARTIE A (2,5 points)

Soit a est un réel strictement positif. On désigne par g_a une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée g'_a . Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes.

(P₁) Pour tout nombre réel x, $(g'_a(x))^2 - a^2\left(g_a(x)\right)^2 = -1$.

(P₂) $g'_a(0) = 0$.

(P₃) g'_a est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. a) *Calculons* $g_a(0)$.

(P₁) Pour tout nombre réel x, $\left(g'_a(x)\right)^2 - a^2\left(g_a(x)\right)^2 = -1$.

Pour $x = 0$, $(g'_a(0))^2 - a^2\left(g_a(0)\right)^2 = -1$,

$$-a^2\left(g_a(0)\right)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(g_a(0)\right)^2 = \frac{1}{a^2}$$
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{g_a(0) = \frac{1}{a}}.$$ **(*0,25pt*)**

b) *Démontrons que, pour tout nombre réel x non nul, $g'_a(x) \neq 0$.*

- g'_a est dérivable et strictement croissante sur $\Rightarrow$ $\forall\, x \neq 0$, $g'_a(x) \neq g'_a(0)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{g'_a(x) \neq 0}$$ **(*0,5pt*)**

c) *En utilisant la propriété* **(P1)** *montrer que pour tout réel x non nul :* $g''_a(x) = a^2 g_a(x)$

(P1) Pour tout nombre réel x, $(g'_a(x))^2 - a^2\left(g_a(x)\right)^2 = -1$.

En dérivant chaque membre obtient

$2g''_a(x)g'_a(x) - 2a^2 g'_a(x)g_a(x) = 0$

$2g'_a(x)[g''_a(x) - a^2 g_a(x)] = 0$, or pour tout nombre réel x non nul, $g'_a(x) \neq 0$

Donc $g''_a(x) = a^2 g_a(x)$. **(*0,5pt*)**

d) *Déduisons-en que pour tout réel x,* $g_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$

La fonction g_a est solution de l'équation différentielle : $y'' = a^2 y$ dont l'équation caractéristique admet deux solutions réelles qui sont a et $-a$. Il existe alors deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ax}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{ax}}$$

On a : $\begin{cases} g_a(0) = \frac{1}{a} \\ g'_a(0) = 0 \end{cases}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A + B = \frac{1}{a} \\ A - B = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2a} \\ B = \frac{1}{2a} \end{cases}.$

Par suite pour tout réel x , $\boldsymbol{g_a(x)} = \frac{\boldsymbol{e^{ax} + e^{-ax}}}{\boldsymbol{2a}}$. **(*0,75pt*)**

2. Montrons que la fonction g_a définie par $g_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ où a est un réel strictement positif est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ dont la fonction dérivée g'_a vérifie les propriétés **(P1), (P2) et (P3).**

- La fonction $g_a$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et y est strictement positive car c'est la somme de deux fonctions dérivables et strictement positives sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :
  $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'_a(x) = \frac{\boldsymbol{e^{ax} - e^{-ax}}}{\boldsymbol{2}}$ et $g''_a(x) = \boldsymbol{a} \times \frac{\boldsymbol{e^{ax} + e^{-ax}}}{\boldsymbol{2}}$
  Les propriétés **(P1), (P2) et (P3)** se vérifient aisément. **(*0,5pt*)**

PARTIE B (2,5 points)

Soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{f_a(x)} = \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{e^{ax} + e^{-ax}}}{\boldsymbol{2a}}\right)$.

1. *Etudions la parité, ses variations puis établissons le tableau de variations de f_a .*

- La fonction $\boldsymbol{f_a}$ **est paire**. **(*0,5pt*)**
- La fonction f_a est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de la fonction ln continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $u : x \mapsto \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to +\infty}} \boldsymbol{f_a(x)} = +\infty$, et puisque $f_a(x)$ est paire, $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to -\infty}} \boldsymbol{f_a(x)} = +\infty$,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f_a}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \frac{\boldsymbol{e^{ax} - e^{-ax}}}{\boldsymbol{e^{ax} + e^{-ax}}}$. **(*0,5pt*)**

Pour tout $x > 0$, $f_a{}'(x)$ a le même signe que $e^{ax} - e^{-ax}$, lequel est positif.

Comme f_a est paire, pour tout réel $x < 0$, $f_a{}'(x) < 0$.

Dressons le tableau de variations de f_a dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	
f_a	$+\infty$	$\searrow$	$-lna$	$\nearrow$	$+\infty$

(*0,5pt*)

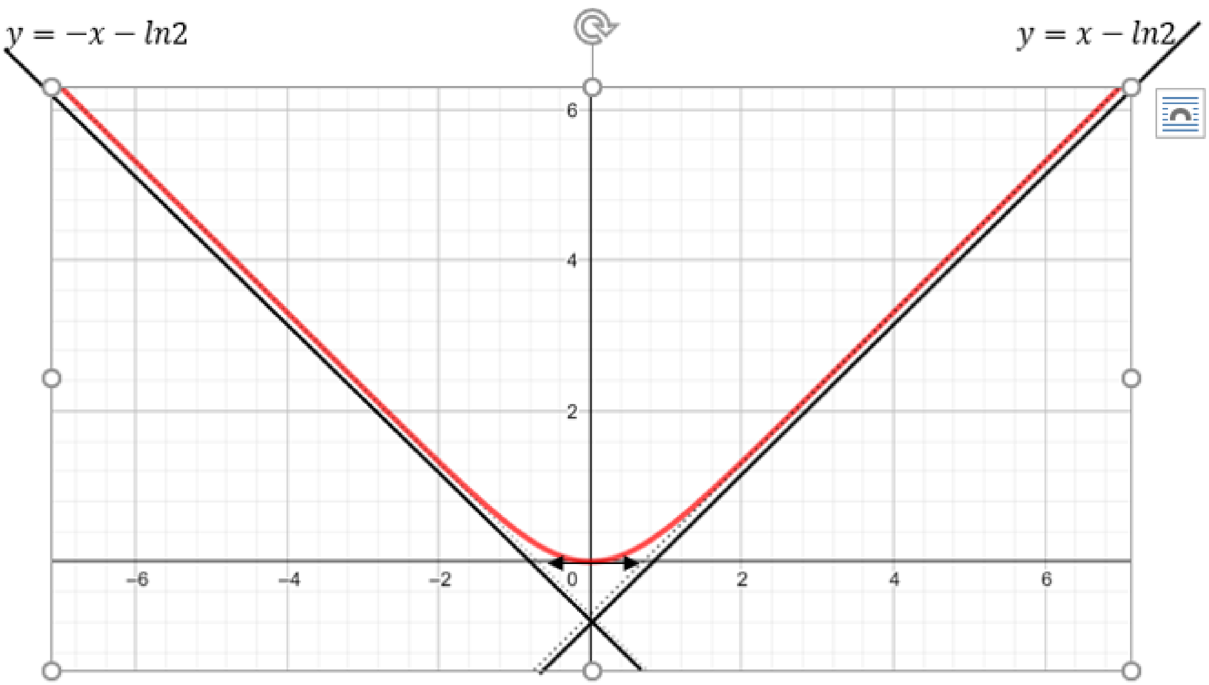
2. *Branches infinies***.**

Pour tout réel $x > 0$, $f_a(x) = \ ax - \ln 2a + \ln(1 + e^{-2ax})$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-2ax}) = 0$,

la droite d'équation $\boldsymbol{y \ = \ ax \ - \ \ln 2a}$ est une asymptote à (C_a) en $+\infty$.

La fonction f_a étant paire, la droite d'équation $\boldsymbol{y = -ax - \ln 2a}$ est une asymptote à (C_a) en $-\infty$. **(*0,5pt*)**

3. *Traçons la courbe de f_1 dans le plan muni d'un repère orthonormal.* **(*0,5pt*)**



PARTIE C (3,5 pts)

Nota Bene : La question 2 est notée 0,75 au lieu de 1 comme indiqué sur l'épreuve.

1. *Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

a) $|f_1'(x)| < 1$

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|e^x - e^{-x}| < |e^x| + |e^{-x}| = e^x + e^{-x} = |e^x + e^{-x}|$.

Par conséquent, $\forall$ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{|f_1'(x)| < 1}$. **(*0,5pt*)**

b) $f_1''(x) = 1 - [f_1'(x)]^2 \quad (\boldsymbol{E_1})$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le rapport de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à dénominateur non nul sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, f_1''(x) = \frac{(e^x - e^{-x})' \times (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x\ +\ e^{-x})^2} = 1 - [f_1'(x)]^2$$

$\boldsymbol{f_1''(x) = 1 - [f_1'(x)]^2}$. **(*0,5pt*)**

2. *Montrons que pour tout $y \in]-1\,,1[$, l'équation $f_1'(x) = y$ admet une solution unique notée t_y puis exprimons t_y en fonction de y.*

La relation $|f_1'(x)| < 1$ pour tout réel x montre que $f_1''(x) > 0$.

Par conséquent, la fonction f_1' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f_1'(x) = +1}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f_1'(x) = -1}$.

La fonction f_1' est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(\mathbb{R}) =]-1\,;\,+1[$.

Elle est donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1\,,1[$.

Par conséquent, pour tout $y \in]-1\,,1[$, l'équation $\boldsymbol{f_1'(x) = y}$ admet une solution unique.**(*0,5pt*)**

Exprimons t_y en fonction de y.

$$f_1'(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x\ -\ e^{-x}}{e^x\ +\ e^{-x}} = y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1\ +\ y}{1\ -\ y}\right).$$

On en déduit que $\boldsymbol{t_y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1\ +\ y}{1\ -\ y}\right)}$. **(*0,25pt*)**

Pour tout $y \in]-1\,,1[$, on pose : $I_n(y) = \int_0^{t_y} [f_1'(u)]^n du$.

On convient que pour tout réel u, $\quad \boldsymbol{[f_1'(u)]^0 = 1}$.

3. *Dans cette question, on suppose que $y \in [0\,,1[$.*

a) *Justifions l'existence de $I_n(y)$.*

Pour tout entier naturel non nul n, $I_n(y)$ existe car la fonction f_1' est continue sur $\mathbb{R}$ (car y étant dérivable), donc sur $[0\,,t_y]$. (Notons que $t_y \geq 0$ si $y \in [0\,,1[$).

D'autre part, $I_0(y) = \int_0^{t_y} du$ existe.

Ainsi, $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{I_n(y)}$ **existe**. **(*0,25pt*)**

b) *Calculons $I_0(y)$ et $I_1(y)$.*

$\boldsymbol{I_0(y) = \int_0^{t_y} du = t_y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1\ +\ y}{1\ -\ y}\right)}$. **(*0,25pt*)**

$\boldsymbol{I_1(y) = \int_0^{t_y} f_1'(u)du = f_1(t_y) - f_1(0) = f_1(t_y) = -\frac{1}{2}\ln(1 - y^2)}$. **(*0,5pt*)**

c) *Montrons que pour tout entier naturel n : $0 \leq I_n(y) \leq t_y \times y^n$.*

La croissance de la fonction f_1' sur $[0\,;\,t_y]$ permet d'écrire, pour tout $u \in [0\,;\,t_y]$,

$0 \leq f_1'(0) \leq f_1'(u) \leq f_1'(t_y)$, puis, $0 \leq [f_1'(0)]^n \leq [f_1'(u)]^n \leq [f_1'(t_y)]^n$.

Par passage à l'intégrale, on obtient : $\boldsymbol{0 \leq I_n(y) \leq t_y[f_1'(t_y)]^n = t_y \times y^n}$. **(*0,5pt*)**

d) *Déduisons-en que la suite* $(I_n(y))_{n\geq 0}$ *est convergente et déterminons sa limite.*

On a $y \in [0\,;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}[t_y \times y^n] = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, la suite $(I_n(y))$ **converge vers 0**. ***(0,25pt)***

PARTIE D (2,5 points)

1. *En utilisant la relation* (E_1)*, montrons que pour tout* entier naturel n, on a :

$$I_{n+2}(y) = I_n(y) - \frac{1}{n+1}y^{n+1}\ (\boldsymbol{E_2}).$$

Pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+2}(y) = \int_0^{t_y}[f_1{}'(u)]^{n+2}du$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{t_y}[f_1{}'(u)]^n \times [f_1{}'(u)]^2 du \\
&= \int_0^{t_y}[f_1{}'(u)]^n \times (1 - f_1''(u))du \\
&= \int_0^{t_y}[f_1{}'(u)]^n du - \int_0^{t_y}[f_1{}'(u)]^n \times f_1''(u)du \\
&= I_n(y) - \frac{1}{n+1}[(f_1{}'(u))^{n+1}]_0^{t_y} \\
&= I_n(y) - \frac{1}{n+1}\left((f_1{}'(t_y))^{n+1} - (f_1{}'(0))^{n+1}\right) \\
&= I_n(y) - \frac{1}{n+1}y^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{I_{n+2}(y) = I_n(y) - \frac{1}{n+1}y^{n+1}} \qquad (\boldsymbol{E_2}).$$ ***(0,5pt)***

2. *Déduisons-en que pour tout entier naturel* $p \geq 1$,

$$\begin{cases} I_{2p}(y) = t_y - \displaystyle\sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{2q+1}y^{2q+1} & (\boldsymbol{E_3}) \\ I_{2p+1}(y) = f_1(t_y) - \displaystyle\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{2q}y^{2q} & (\boldsymbol{E_4}) \end{cases}$$

Dans la relation $(\boldsymbol{E_2})$ en prenant $n = 2q$, q entier naturel on obtient :

$$I_{2q+2}(y) - I_{2q}(y) = -\frac{1}{2q+1}y^{2q+1}$$

Si p est un entier naturel non nul, en sommant cette relation de 0 à $p-1$, il vient :

$$\sum_{q=0}^{p-1}\left(I_{2(q+1)}(y) - I_{2q}(y)\right) = -\sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{2q+1}y^{2q+1}$$

Ce qui donne $\quad I_{2p}(y) - I_0(y) = -\sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{2q+1}y^{2q+1}$. ***(1pt)***

Ou encore

$$I_{2p}(y) = t_y - \sum_{q=0}^{p-1}\frac{1}{2q+1}y^{2q+1}$$

De même, dans la relation $(\boldsymbol{E_2})$ en prenant $n = 2q - 1$, q entier naturel non nul, on obtient :

$$I_{2q+1}(y) - I_{2q-1}(y) = -\frac{1}{2q}y^{2q}$$

Si p est un entier naturel non nul, en sommant cette relation de 1 à p, il vient :

$$\sum_{q=1}^{p} I_{2q+1}(y) - I_{2q-1}(y) = -\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{2q}y^{2q}$$

Ce qui donne

$$\boldsymbol{I_{2p+1}(y) - I_1(y) = -\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{2q}y^{2q}}$$

Ou encore

$$\boldsymbol{I_{2p+1}(y) = f_1(t_y) - \sum_{q=1}^{p}\frac{1}{2q}y^{2q}}$$

3. *Montrons que tout* $y \in]-1\,,1[$, $t_{-y} = -t_y$.

Pour $y \in]-1\,,1[$, $t_y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Sachant que $\boldsymbol{-y \in]-1\,;1[}$, $\boldsymbol{t_{(-y)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = -t_y}$. **(*0,5pt*)**

4. *Pour* $y \in]-1\,;1[$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose :* $J_n(y) = \int_{t_{(-y)}}^{t_y}[f_1'(u)]^n du$.

Montrons que si n est pair, $J_n(y) = 2I_n(y)$ *et que si* n *est impair,* $J_n(y) = 0$.

Soit $y \in]-1\,;1[$. On a alors : $J_n(y) = \int_{-t_y}^{t_y}[f_1'(u)]^n du$.

Or la fonction $\boldsymbol{u \mapsto f_1'(u)}$ **est impaire**. Ainsi,

- Si n est pair, $u \mapsto [f_1'(u)]^n$ est pair, et

$$\boldsymbol{J_n(y) = \int_{-t_y}^{t_y}[f_1'(u)]^n du = 2 \times \int_0^{t_y}[f_1'(u)]^n du = 2I_n(y)}.$$

- Si n est impair, $u \mapsto [f_1'(u)]^n$ est impair et $\boldsymbol{J_n(y) = \int_{-t_y}^{t_y}[f_1'(u)]^n du = 0}$. **(*0,5pt*)**