OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 825.24.58 - Tél. : 824.95.92 – 824.65.81

Durée : 4 heures

Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1^er groupe

CORRIGÉ MATHEMATIQUES SUJET 1

EXERCICE 1 : (04 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit le nombre complexe a défini par $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Montrons que $a^2=-2\sqrt{3}-2i$.

$a^2=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-2i\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=-2\sqrt{3}-2i\sqrt{1}.$

D'où $a^2=-2\sqrt{3}-2i.$ **0,5 pt**

Déduisons-en le module de a.

$$|a^2|=4\Longrightarrow|a|^2=4\Longrightarrow|a|=2.$$ **0,5 pt**

2. Ecrivons a^2 sous forme trigonométrique**.**

$a^2=-2\sqrt{3}-2i=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=4\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

$$a^2=4(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}).$$ **0,5 pt**

Vérifions qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$.

$\arg(a^2)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]\Longrightarrow 2\arg(a)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]\Longrightarrow\arg(a)\equiv\frac{7\pi}{12}[\pi]$ ou $\arg(a)=\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Prenant $k=1$, $\arg(a)=\frac{7\pi}{12}+\pi=\frac{19\pi}{12}.$ **0,5 pt**

3. Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$a=2\left[\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right]=2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\pi\right)\right]=-2\cos\frac{7\pi}{12}-2i\sin\frac{7\pi}{12}$ et

$$a=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Ce qui implique que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. **(0,25+0,25) pt**

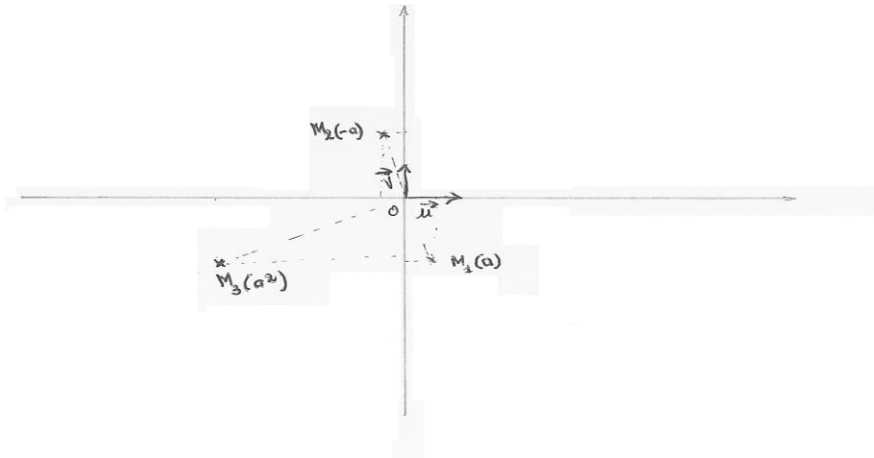
Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{6\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=-\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$ **(0,25+0,25) pt**

4. Représentons sur le même graphique les points images de $a, -a\ et\ a^2$.



1 pt

EXERCICE 2 : (04 pts)

On jette trois fois de suite un dé non truqué à six faces portant les chiffres allant de 1 à 6. On lit les numéros des faces supérieures et on les note dans cet ordre a, b, c. Puis on forme l'équation du second degré (E) : $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Soit A l'événement : « -1 est solution de (E) avec $b = 6$ ».
   Justifions que $p(A) = \frac{5}{216}$.
   Si -1 est solution de (E) avec $b = 6$ alors a et c vérifient la relation $a + c = 6$. D'où $A = \{(1,6,5);\ (2,6,4); (3,6,3); (5,6,1); (4,6,2)\}$.
   Ce qui donne $p(A) = 5 \times \frac{1}{6^3} = \frac{5}{6^3} = \frac{5}{216}$. **0,5 pt**
2. La probabilité de l'événement :
   - ✓ $\boldsymbol{B}$: " $\boldsymbol{-2}$ **est solution de** $\boldsymbol{(E)}$ **et** $\boldsymbol{c = 4}$ " est $p(B) = \frac{1}{108}$.
     Justification : Si -2 est solution de (E) et $c = 4$ alors a et b vérifient la relation $4a - 2b + 4 = 0$. Ce qui implique que $b = 2a + 2$. D'où $B = \{(1,4,4);\ (2,6,4)\}$.
     Ce qui donne $p(B) = \frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$. **0,5 pt**
   - ✓ $\boldsymbol{C}$: " **la somme des solutions est – 2 et leur produit est 1**" est $p(C) = \frac{1}{72}$.
     Justification : Si la somme des solutions est – 2 et leur produit est 1 alors a , b et c vérifient $\begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases}$.
     D'où $C = \{(1,2,1);\ (2,4,2);\ (3,6,3)\}$.
     Ce qui donne $p(C) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$. **0,5 pt**
   - ✓ $\boldsymbol{D}$: " **Les deux solutions sont confondues avec** $\boldsymbol{b = 4}$ " est $p(D) = \frac{1}{72}$.
     Justification : Si les deux solutions sont confondues avec $b = 4$ alors a , b et c vérifient $\begin{cases} b^2 = 4ac \\ b = 4 \end{cases}$.
     Ce qui implique que a et c vérifient la relation $a \times c = 4$.
     D'où $D = \{(1,4,4);\ (2,4,2);\ (4,4,1)\}$.
     Ce qui donne $p(D) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$. **0,5 pt**
3. L'épreuve précédente est répétée 10 fois de suite et de façon indépendante.
   a) Soit F l'événement : " l'événement A se réalise une seule fois au 3ème essai".
   Montrons que $p(F) = \frac{5 \times (211)^9}{(216)^{10}}$.
   Désignons par S « l'événement A se réalise » et par E « l'événement A ne se réalise pas».
   D'où F est le $10 - uplets$ défini comme suit : $F = (E, E, S, E, E, E, E, E, E, E)$. Donc
   $p(F) = C_1^1 \times \frac{5}{216} \times \left(\frac{211}{216}\right)^9$. **0,5 pt**
   b) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de l'événement A à l'issue des 10 épreuves.
   b-1) La loi de probabilité de Y:
$$Y = \{0, 1 ,2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8 ,9, 10\}$$
$$p(Y = k) = C_{10}^k \times \left(\frac{5}{216}\right)^k \times \left(\frac{211}{216}\right)^{10-k}.$$
0,5 pt

Ici Y suit une loi binomiale $B(n, p)$ de probabilité p ; $n = 10$.

b-2) Le nombre espéré de réalisations de$A$ est : $E(Y) = n \times p(A) = 10 \times \frac{5}{216} = \frac{25}{108}$. **0,5 pt**

b-3) La variance de Y est : $V(Y) = n \times p(A)(1 - p(A)) = 10 \times \frac{5}{216} \times \frac{211}{216} = \frac{10550}{(216)^2}$. **0,5 pt**

PROBLEME : (12 pts)

A.

1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 0 < x < 1\ \ ou\, x \geq 1 \Leftrightarrow x \in\ ]0, +\infty[$

   $Df =\ ]0, +\infty[$. **0,5 pt**

2. $f(1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 + 1 = 2$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} 1 + x - x\ln x = 1 + 1 - 1\ln 1 = 2$,

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1}} = 2$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$.

Donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$; d'où f est continue en 1. **0,5 pt**

3. supposons que $0 < x < 1$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1+x-x\ln x-2}{x-1} = \frac{x-1-x\ln x}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)$ or $\lim\limits_{x\to1^-} x = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, d'où

$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - 1(1) = 1 - 1 = 0.$

Donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$. **0,25 pt**

Supposons que $x > 1$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}-2}{x-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{x-1} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x-1)} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)}.$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)}$. D'où $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{\sqrt{1}\left(\sqrt{1}+1\right)} = -\frac{1}{2}$;

donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$. **0,25 pt**

$f'_d(1) \neq f'_g(1)$; donc f n'est pas dérivable en 1. **0,25 pt**

$f'_g(1) = 0$; donc (C_f) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente horizontale à gauche. **0,25 pt**

$f'_d(1) = -\frac{1}{2}$; donc (C_f) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente oblique de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ à droite. **0,25 pt**

4. $\lim\limits_{x\to0^+} 1 + x = 1 + 0 = 1$; $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$. **0,25 pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. **0,25 pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. **0,25 pt**

5. $0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$; donc f admet un prolongement par continuité à droite en 0.

$\begin{cases} h(x) = f(x) \text{ si } x > 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$ **0,5 pt**

6. Supposons que $0 < x < 1$.

$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{1+x-x\ln x-1}{x} = \frac{x-x\ln x}{x} = \frac{x(1-\ln x)}{x} = 1 - \ln x.$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} 1 - \ln x$; $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} 1 - \ln x = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = +\infty$; donc h n'est pas dérivable à droite en 0. **0,25 pt**

La courbe de h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale à droite. **0,25 pt**

7. $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = 1 - \left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$. **0,5 pt**

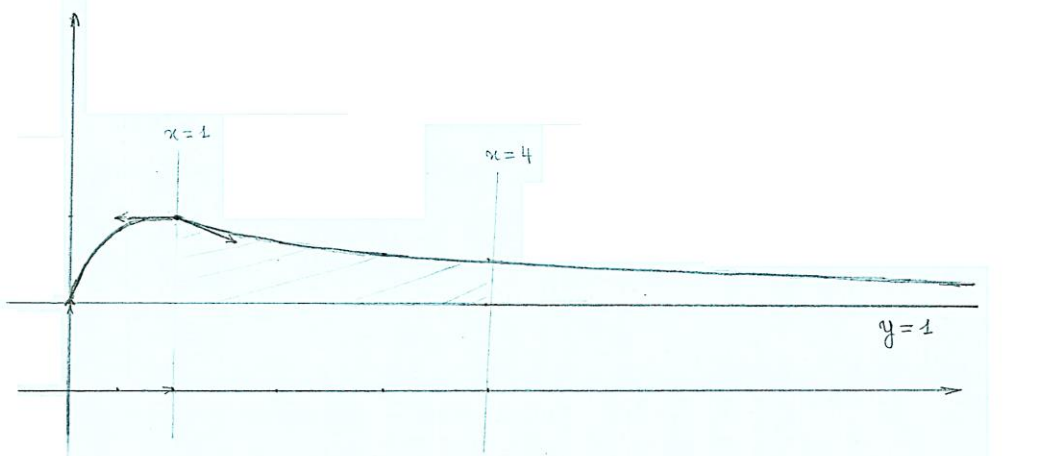
$\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. **0,5 pt**

$\forall x \in]0,1[$, $\ln x < 0 \implies -\ln x > 0 \implies f'(x) > 0$.

$\forall x \in]1,+\infty[$, $x\sqrt{x} > 0 \implies f'(x) < 0$. **1 pt**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

7) a)



$f(2) \simeq 1{,}71$; $f(3) \simeq 1{,}58$; $f(4) = 1{,}5$; $f(0{,}5) \simeq 1{,}85$

1 pt

b. $A = \int_1^4 [f(x) - 1]\, dx \times \mathcal{U}.a$, avec $\mathcal{U}.a$ = unité d'aire.

On a : $\int_1^4 [f(x) - 1]\, dx = \int_1^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2.$

Or $1\ \mathcal{U}.a = 2\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$.

Donc $A = 2 \times 4\text{ cm}^2 = 8\text{ cm}^2$. **1 pt**

B. 1. $g = f$ sur $[1, +\infty[$.

a. $g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0 \Leftrightarrow k(x) = 0$, avec $k(x) = g(x) - x$.

k est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$\forall\, x \in]1, +\infty[, k'(x) = g'(x) - 1 = f'(x) - 1 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1.$ **0,25 pt**

$\forall\, x \in]1, +\infty[, k'(x) < 0$, donc k est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. **0,25 pt**

Donc k est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $k([1, +\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} k(x),\ k(1)\right] =]-\infty, 1].$ **0,25 pt**

Or $0 \in]-\infty, 1]$, donc l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$. En conséquence l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1, +\infty[$. **0,25 pt**

$k(1) = 1$; $k(2) = g(2) - 2 = f(2) - 2 \simeq 1{,}71 - 2 \simeq -0{,}29.$

$k(1) \times k(2) < 0 \Rightarrow 1 < \alpha < 2.$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$k(x)$	1					0,32	0,19	0,06	-0,05	-0.37	-0,29

$k(1{,}5) = f(1{,}5) - 1{,}5 \simeq 0{,}32$; $k(1{,}6) = f(1{,}6) - 1{,}6 \simeq 0{,}19$;

$k(1{,}7) = f(1{,}7) - 1{,}7 \simeq 0{,}06$; $k(1{,}8) = f(1{,}8) - 1{,}8 \simeq -0{,}05.$

$k(1{,}7) \times k(1{,}8) < 0 \Rightarrow 1{,}7 < \alpha < 1{,}8.$ **0,25 pt**

b. $\forall\, x \in [1, +\infty[,\ g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow |g'(x)| = \left|-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$

$x \in [1, +\infty[\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow x\sqrt{x} \geq x$

$\Rightarrow x\sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow 2\, x\sqrt{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2\, x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$ **0,5 pt**

c. g est dérivable sur $[1, +\infty[$

$\forall\, t \in [1, +\infty[,\ |g'(t)| \leq \frac{1}{2}$. Or $\alpha \in [1, +\infty[$; donc $\forall\, x \in [1, +\infty[,\ |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\Longrightarrow\ |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|.$ **0,25 pt**

2. a. $w_0 = 2.$ Or $2\ \geq 1$; donc $w_0\ \geq 1.$
Supposons que $w_n \geq 1, n\ \geq 0$ et montrons que $w_{n+1} \geq 1.$
$w_n \geq 1 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{w_n}} > 0\ \ \Longrightarrow\ \ 1+\frac{1}{\sqrt{w_n}} > 1\ \ \Longrightarrow\ w_{n+1} > 1 \Longrightarrow\ w_{n+1}\ \geq 1.$
D'où $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ w_n \geq 1.$ **0,75 pt**

b. $\forall\, x \in [1,+\infty[\ ,\ |g(x)-\ \alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|.$
Or d'après la question précédente, $w_n\ \geq\ 1.$ Ce qui implique que $w_n \in\ [1,+\infty[.$
$w_n \in\ [1,+\infty[\ \Longrightarrow |g(w_n)-\ \alpha| \leq\ \frac{1}{2}\ |w_n-\alpha| \Longrightarrow\ |w_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\ |w_n-\alpha|.$ **0,25 pt**

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |w_0-\alpha| = |w_0-\alpha|.$ Or $|w_0-\ \alpha| \leq |w_0-\alpha|$, donc $|w_0-\ \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0\ |w_0-\ \alpha|.$
Supposons que $|w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\alpha|, n\ \geq 0$ et montrons que $|w_{n+1}-\ \alpha|\ \ \leq\ \ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ |w_0-\ \alpha|.$
$|w_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|w_n-\alpha|.$ Or $|w_n-\ \alpha|\ \leq\ \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |w_0-\ \alpha|,$ donc $|w_{n+1}-\ \alpha|\ \leq\ \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |w_0-\ \alpha|$
$\Longrightarrow\ \ |w_{n+1}-\ \alpha|\ \leq\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |w_0-\ \alpha|.$
D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |w_n-\ \alpha|\ \leq\ \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |w_0-\ \alpha|.$ **0,75 pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Longrightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |w_0-\ \alpha|=0 \Longrightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty} |w_n-\ \alpha|=0 \Longrightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty} w_n = \alpha.$ **0,25 pt**