

# Mathématiques I

## Épreuve 2012

**Question 1 :** Un jeu vidéo est constitué de  $n$  niveaux successifs.

Lorsque le joueur commence un niveau, ce qui suppose qu'il réussit tous les niveaux précédents, la probabilité qu'il le réussisse est  $\frac{2}{3}$ . Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de niveau réussis par le joueur. Pour tout entier naturel  $k$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , exprimer la probabilité  $P(X \geq k)$  en fonction de  $k$ .

- A)  $(\frac{2}{3})^k (k-1)$     B)  $(\frac{2}{3})^k$     C)  $(\frac{1}{3})^{k+1}$     D)  $\frac{2}{3} (\frac{1}{3})^k$     E) Autre réponse

**Question 2 :** On considère le modèle très simple ci-après, qui décrit l'évolution du cours d'une action à la bourse. On suppose que chaque jour de cotation, trois cas seulement sont possibles :

- i) le prix de l'action augmente de 1 dirham
- ii) le prix reste stable
- iii) le prix diminue d'un dirham

De plus la variation journalière du prix est considérée comme une variable aléatoire  $X$ . D'après ce qui précède, la v. a.  $X$  prend les valeurs  $-1, 0, 1$ ; les probabilités correspondantes seront notées  $q, 1-q-r$  et  $r$ , respectivement.

La variance  $V(X)$  de la v. a.  $X$  est alors égale à :

- A)  $(r-q)^2$     B)  $(r+q)^2$     C)  $(r-q)(r+q)$     D)  $r^2+q^2+1$     E) Autre réponse

**Question 3 :** le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire  $X$  dont on donne la loi de probabilité :

$X$	0	1	2
$P(X=x_i)=p_i$	0,15	0,45	0,4

Dans cette station-service la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant des autres clients. On considère l'événement suivant

E : " En cinq minute un client achète de l'essence "

La probabilité P(E) est alors égale :

- A) 0,483 B) 0,315 C) 0,25 D) 0,42 E) Autre réponse

**Question 4 :** On joue à un jeu où la probabilité de gagner à une partie est de 5%. Si le joueur gagne à une partie, il obtient un gain net de 900, sinon il perd 100 (le gain du joueur à une partie est donc soit + 900, soit - 100). Si le joueur joue à 25 parties de ce jeu, alors la variance de son gain moyen est :

- A) 1800 B) 1900 C) 2000 D) 2100 E) Autre réponse

**Question 5 :** On considère un type de composants électroniques dont la durée de vie X, exprimée en heure, est une variable aléatoire de densité de probabilité f, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{t^2}, & t \geq 10 \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

Déterminer le réel m pour lequel :  $P(X \leq m) = P(X > m)$

- A)  $m = 15$  B)  $m = 20$  C)  $m = \frac{1}{10}$  D)  $m = \frac{2}{5}$  E) Autre réponse

**Question 6 :** Deux tireurs ouvrent le feu simultanément. La probabilité d'un coup au but du premier tireur est égale à  $p_1$  ; celle du second tireur est égale à  $p_2$ . La probabilité pour qu'un tireur atteigne le but et que l'autre le rate est égale à

- A)  $(p_1 + p_2)^2$  B)  $(p_1 - p_2)^2$  C)  $|p_1 - p_2|$  D)  $|p_1 + p_2|$  E) autre réponse

**Question 7 :** On considère, pour tout n entier naturel, l'intégrale.

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n e^{1-x}}{n!} dx$$

Après une intégration par partie donnant une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ , montrer que pour tout n naturel on a :

- A)  $I_n = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$  B)  $I_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$  C)  $I_n = 1 - \sum_{p=0}^n \frac{2}{p!}$  D)  $I_n = e - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$   
E) Autre réponse

**Question 8 :** Soit F la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\sqrt{2t+1}} dt$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) =$$

- A)  $-\infty$       B)  $\frac{1}{2}$       C) 0      D)  $-\infty$       E) Autre réponse

**Question 9 :** La COVECOR est une coopérative de vente par correspondance . Chaque sociétaire est muni d'un indicatif. De plus, pour commander par le réseau internet, il doit posséder un code secret personnel. L'indicatif du sociétaire est formé d'un numéro de 4 chiffres suivi deux lettres, répondant aux conditions suivantes :

- Il peut y avoir répétition des chiffres.
- Il ne peut y avoir répétition de lettres ;
- Le premier chiffre à gauche ne peut être zéro ;
- la lettre ne peut être B.

Alors le nombre d'indicatifs est :

- A)  $(10^4 - 9^4) \times 25^2$     B)  $(10^5 - 9^4) \times 50$     C)  $(10^5 - 9^4) \times 25$     D) 2158    E) Autre réponse

**Question 10 :** On considère la fonction définie par :  $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$  au voisinage de  $+\infty$ ,  $[f(x) - x]$  est équivalent à :

- A)  $e^{-x}$     B)  $-e^{-x}$     C)  $e^{-2x}$     D)  $-e^{-2x}$     E) Autre réponse

**Question 11 :** Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

- A)  $\frac{-\ln 2}{3} + 2\ln 2 - \ln 3$       B)  $\frac{-\ln 2}{3} + \ln 2 - \ln 3$       C)  $\frac{-\ln 2}{3} \ln 3$       D)  $\frac{-\ln 2}{3} + \ln$   
E) autre réponse

**Question 12 :** L'intégrale  $\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx$  est égale à :

- A)  $\frac{115}{15}$       B)  $\frac{116}{15}$       C)  $\frac{117}{15}$       D)  $\frac{15}{2}$       E) Autre réponse

**Question 13 :** On considère le tableau de contingence suivant :

$Y_j \backslash X_i$	2	4	6	$n_i$
2	0	1	1	2
4	2	3	0	5
6	1	1	1	3
$n_j$	3	5	2	10

La moyenne conditionnelle de X si  $Y = y_2$  est :

- A) 3,2      B) 4      C) 7      D) 2      E) Autre réponse

**Question 14** : Soient A, B et I les trois matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après avoir calculé  $B^2$  et  $B^3$  et exprimé A en fonction de B et I, pour tout entier naturel n,  $A^n$  est égale à :

A)  $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B)  $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n+1 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C)  $\begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D)  $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n+1 \\ 0 & n & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E) Autre réponse

**Question 15** : Soit f la fonction réelle de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}} ; \text{ on désigne par } f' \text{ la fonction dérivée de } f, \text{ alors } f'(x) \text{ est égale à}$$

A)  $\frac{2-x}{x(x^2-x+1)}$  B)  $\frac{2+x}{2x(x^2-x+1)}$  C)  $\frac{2-x}{2x(x^2-x+1)}$  D)  $\frac{2}{x(x^2-x+1)}$  E) Autre réponse

**Question 16** : Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne que des urnes de la même couleur.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre total de tirages nécessaires. Calculer la probabilité  $P(X=4)$ .

A)  $\frac{2}{3}$  B)  $\frac{4}{15}$  C)  $\frac{8}{81}$  D)  $\frac{3}{15}$  E) Autre réponse

**Question 17** : une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose X « le nombre d'essais pour ouvrir la porte ».

Alors la variance de X est égale à :

A)  $\frac{5}{2}$  B) 2 C)  $\frac{5}{4}$  D) 1 E) Autre réponse

**Question 18** : Soit A la matrice définie par  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , la matrice inverse de A est :

A)  $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

B)  $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

C)  $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

D)  $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

E) Autre réponse

**Question 19** : Soient les matrices carrées :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } A \text{ telle que } P^{-1}AP = D$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+; A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est égal à :

A)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$     B)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$     C)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$     D)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

E) Autre réponse

**Question 20**: soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$  et  $(1 - u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$ ,

alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) =$

- A) 1;    B)  $\frac{1}{2}$ ;    C) 0    D)  $+\infty$     E) Autre Réponse

# Mathématiques II

## Épreuve 2012

**Question 1 :** soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels, et soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ .

On pose  $I_{p,q} = \int_b^a (t-a)^p (b-t)^q dt$

Après avoir établi une récurrence entre et, réduire l'expression de  $I_{p,q}$  et  $I_{p+1,q-1}$ , déduire l'expression de  $I_{p,q}$ .

A)  $\frac{p!q!}{(p+q-1)!} (a-b)^{p+q}$  B)  $\frac{p!q!}{(p+q)!} (a-b)^{p+q+1}$  C)  $\frac{p!q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1}$

D)  $\frac{(p+q)!}{(pq)!} (b-a)^{p+q-1}$  E) Autre réponse

**Question 2 :** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P[(X=i) \cap (Y=j)] = \frac{1}{j!} \frac{a}{2^{i+j}}$$

Pour que la formule précédente définisse une loi de probabilité conjointe du couple  $(X, Y)$ , la constante  $a$  est :

A)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  B)  $\frac{1}{2\sqrt{e}}$  C)  $\frac{1}{2e}$  D)  $\frac{1}{2}$  E) Autre réponse

**Question 3 :** Soit  $E$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si  $U_1, U_2, U_3, U_4$  sont les matrices définies par :

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , la famille  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  est une base de  $E$ , qui est donc de dimension 4.

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $E$  et  $\varphi_{A,B}$  l'application qui, à toute matrice  $M$  de  $E$ , associe la matrice  $AM - MB$ .

$\varphi_{A,B}$  est un endomorphisme de  $E$ .

Dans le cas particulier où  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , la matrice carrée d'ordre 4 qui représente  $\varphi_{A,B}$  dans la base  $(U_1, U_2, U_3, U_4)$  est alors égale à :

A)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  B)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  C)  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D)  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  E) Autre réponse

**Question 4 :** Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , alors un équivalent de  $S_n$  quand  $n$  tend vers l'infini est :

- A)  $n!$     B)  $\log(n!)$     C)  $n \log 2$     D)  $\log n$     E) Autre réponse

Note :  $\log x$  désigne le logarithme népérien de  $x$  ( $x \in \mathbb{R}^*_+$ ).

**Question 5 :** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre  $n$  invités que l'on note :  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on modélise l'instant d'arrivée de l'invité  $I_k$  par une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 1]$ . On suppose de plus que, pour tout réel  $t$ , les  $n$  événements  $(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$ , sont indépendants.

Soit un réel  $t$  appartenant à  $[0; 1]$ . Pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on note  $B_k$  la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement  $(T_k \leq t)$  est réalisé et la valeur 0 sinon.

Soit  $S_t$  la variable définie par :  $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ , et  $A$  la variable aléatoire égale à l'instant d'arrivée du premier invité.

Après avoir comparé les événements :  $(A > t)$  et  $(S_t = 0)$ , déterminer la densité  $f$  de la variable aléatoire  $A$ .

A)  $f(t) = \begin{cases} t^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

B)  $f(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

C)  $f(t) = \begin{cases} 1-t^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

D)  $f(t) = \begin{cases} nt^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

E) Autre réponse

**Question 6 :** Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 5z, 2x - y, -x + 2y - z)$$

Soit  $u = (0, 1, 1, \alpha)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^4$ , où  $\alpha$  est un nombre réel. Pour quelle valeur de  $\alpha$  le vecteur  $u$  appartient au sous espace vectoriel  $\text{Im}(f)$ .

- A)  $\frac{4}{5}$     B)  $\frac{2}{5}$     C)  $-\frac{2}{5}$     D)  $-\frac{4}{5}$     E) Autre réponse

**Question 7 :** Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les cotés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales relient le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

■ Le pion est sur le sommet 1 au départ.

■ Lorsque le pion est à l'instant donné sur un sommet du carré, il se déplace l'instant

suivant vers un sommet voisin (relié par un coté) avec la probabilité  $\frac{1}{4}$  ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité de  $\frac{1}{2}$ .

On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro de sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant  $n$ . On a donc  $X_0 = 1$ .

Soit  $A$  la matrice carrée d'ordre 4 dont le terme situé à l'intersection de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et de la  $j^{\text{ème}}$  colonne est égal à la probabilité conditionnelle  $p(X_{n+1} = i / X_n = j)$ .

On considère les matrices  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $J$  et  $K$  sous la forme :

- A)  $A = \frac{1}{3}J + \frac{2}{3}K$     B)  $A = \frac{1}{2}J + \frac{1}{4}K$     C)  $A = \frac{2}{3}J + \frac{1}{3}K$     D)  $A = \frac{1}{4}J + \frac{1}{2}K$



E) Autre réponse

**Question 8 :** Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $S_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ , alors un équivalent de  $S_n$  quand  $n$  tend vers l'infini est :

- A)  $\sqrt{n}$     B)  $\sqrt{2n}$     C)  $2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$     D)  $2(\sqrt{2} + 1)\sqrt{n}$     E) Autre réponse

**Question 9 :** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 1]$

L'espérance de la variable aléatoire  $Y$  définie par  $Y = \frac{X}{2-X}$  est :

- A)  $\frac{1}{2}$     B)  $\frac{\ln 2}{2}$     C)  $2\ln 2 - 1$     D)  $4\ln 2 + 1$     E) Autre réponse

**Question 10 :** Une urne contient 10 boules rouges et 2 boules jaunes. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule rouge.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires.

La variance de la variable  $X$  est alors égale à :

**Question 11 :** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $f_n$  par :

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

**N.B :**  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est dérivable en 1 ; de plus, la dérivée de  $f_n$  en 1 égale à :

- A)  $-\frac{1}{2} + 7n$     B)  $-\frac{1}{2} + 3n$     C)  $\frac{n+1}{2}$     D)  $\frac{n-1}{2}$     E) Autre réponse

**Question 12 :** Soit  $f$  la fonction réelle définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est positive et qu'elle vérifie la propriété  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ; On désigne par  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt .$$

Soit  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit  $X_1, X_2, \dots, X_N$   $N$  variables aléatoires réelles indépendantes ayant toutes la même fonction de répartition  $F$ . On définit la variable aléatoire réelle  $Y_N$  par  $Y_N = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_N)$  alors  $Y_N$  admet une densité de probabilité  $g$  définie par :

- A)  $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = Nf(x)[F(x)]^{2N-2}$
- B)  $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = Nf(x)[F(x)]^{N-1}$
- C)  $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = NF(x)[f(x)]^{N-1}$
- D)  $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = [f(x)]^N$
- E) Autre réponse

**Question 13 :** Soit  $U$  une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance  $\frac{1}{2}$ .

En utilisant la définition de la variance de  $U$ , calculer  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

- A)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- B)  $\frac{\sqrt{2\pi}}{3}$
- C)  $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$
- D)  $\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$
- E) Autre réponse

**Question 14 :** On considère la suite  $(S_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$$

La suite  $(S_n)$  converge vers :

- A)  $\frac{1}{2}$
- B)  $\frac{1}{2} \ln 2$
- C)  $\frac{3}{2}$
- D)  $\frac{3}{2} \ln 2$
- E) Autre réponse

**Question 15:**  $\alpha$  désigne un paramètre réel.

On considère la matrice  $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & +1 \end{pmatrix}$

Et on note  $\varphi_\alpha$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté par  $A_\alpha$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Quel que soit  $\alpha$ , l'endomorphisme  $\varphi_\alpha$  admet les valeurs propres :

- A)  $(\alpha - 1)$  et  $(\alpha + 1)$     B) 1 et  $(\alpha - 1)$     C) -1 et  $(\alpha - 1)$     D) 1 et  $(\alpha + 1)$   
 E) Autre réponse

**Question 16 :** Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1})^x;$$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

- A)  $+\infty$     B)  $\frac{1}{3}$     C)  $e$     D)  $\frac{1}{e}$     E) Autre réponse

Note :  $e$  désigne la base du logarithme népérien.

**Question 17 :** On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après avoir déterminé une matrice carrée  $P$  d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne  $(-1, 1, 1)$  telle que  $A = PDP^{-1}$ , calculer la matrice  $C = P^{-1}BP$

- A)  $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$     B)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$     C)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$   
 D)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$     E) Autre réponse

**Question 18 :** On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + \lambda y = \alpha \\ \lambda x + y = \beta \\ x + \lambda y + z + \lambda t = \gamma \\ x - \lambda + \lambda z + t = \delta \end{cases}$$

où  $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^5$

La condition nécessaire pour que le système admette une infinité de solution est :

A)  $\lambda \in \{0, 2\}$     B)  $\lambda \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$     C)  $\lambda \in \{-1, 1\}$     D)  $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

E) Autre réponse

**Question 19 :** Au cours d'un scrutin, des enquêteurs organisent un sondage à la sortie des bureaux de vote. On considère que le scrutin débute à l'instant 0 et s'achève à l'instant 1. La liste électorale comprend  $n$  noms, numérotés de 1 à  $n$ . Il ne peut pas y avoir d'abstentions. On modélise l'instant d'arrivée de l'électeur  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , par une variable aléatoire  $X_i$  de loi uniforme sur le segment  $[0,1]$ .

Les variables  $X_i$  sont supposées mutuellement indépendantes. On note :

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  les  $n$  variables aléatoires ayant pour valeurs les valeurs variables

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ordonnées dans l'ordre croissant. Par exemple, pour  $n=4$ , si on obtient

$X_1 = 0,3$  ;  $X_2 = 0,1$  ;  $X_3 = 0,7$  ;  $X_4 = 0,2$  , on aura :

$Y_1 = 0,1$  ;  $Y_2 = 0,2$  ;  $Y_3 = 0,3$  ;  $Y_4 = 0,7$ .

Soit  $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  l'instant d'arrivée du dernier volant. La variance de  $Y_n$  est alors égale à :

A)  $\frac{n}{(2n+1)(n+3)}$     B)  $\frac{2n}{(n+1)(n+4)}$     C)  $\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$     D)  $\frac{2n}{(n+3)^2(n+1)}$

E) Autre réponse

**Question 20 :** Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x - 1)}$  ;

Alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

A)  $-\infty$     B)  $-1$     C)  $-\frac{1}{2}$     D)  $+\frac{1}{2}$     E) Autre réponse