1

MINESEC	Année scolaire 2019-2020	Epreuve de Mathématiques
Lycée Bilingue de Bafia	Classe : Tle C	Coéfficient :5
Département de Mathématiques	Contrôle $N^o 4$	Durée : 4h

Exercice 1 : .... **(4 points)**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et soit le point I tel que le triangle CAI soit un triangle rectangle et isocèle $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit H le milieu de $[BC]$; J le milieu de $[AI]$ et (Δ) la parallèle à (AB) passant par H.

1. **a** Soit r la rotation qui transforme A en I et B en C
   Déterminer son angle et construire son centre Ω. ***0,5 pt***
   b Montrer que $AB\Omega C$ est un losange ***0,5 pt***
2. Montrer qu'il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g qui transforme A en Ω et B en C ***0,5 pt***
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f ***0,5 pt***
4. Soit S la sumétrie d'axe (AB)
   a Justifier que $g = f \circ S$ ***0,5 pt***
   b En écrivant $f = S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$ où (Δ') est une droite à préciser, déterminer nature et les éléments caractéristiques de g. ***1 pt***
5. Déterminer la nature et les élément caractéristique de $r^{-1} \circ g$ et $r^{-1} \circ f$ ***1 pt***

Exercice 2 : .... **(4 points)**

On pose pour $n \geq 1$, $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$

1. Calculer U_1 ***0,25 pt***
2. **a** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ ***0,75 pt***
   b En déduire que $1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$ ***0,5 pt***
   c Déterminer la limite de la suite (U_n) ***0,25 pt***
3. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx$
   a Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $V_n = ln2 - \int_0^1 ln(1+x^n)dx$
   $\left(\textbf{On pourra remarquer que } \frac{nx^n}{1+x^n} = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}x\right)$ ***0,75 pt***
   b Démontrer que pour tout $t \geq 0$, $0 \leq ln(1+t) \leq t$ ***0,75 pt***
   c Montrer que $0 \leq \int_0^1 ln(1+x^n)dx \leq \frac{1}{n+1}$ ***0,5 pt***
   d En déduire que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} V_n = ln2$ ***0,75 pt***

Problème .... **(12 points)**

Partie A:

$(O, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$(unité graphique 5cm)

1. On définit la fonction f sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = sinx$
   a Etudier les variation de f et dresser son tableau de variation ***0,5pt***
   b Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle I à préciser ***0.5pt***
2. Soit g la fonction définie sur $]-1;1[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   a Montrer que g est continue sur $]-1;1[$ ***0,25pt***

1. ***« La musique est une mathématique sonore et la mathématique une musique silencieuse »   Edouard Herriot***

b En déduire que g admet une primitive sur $]-1;1[$ ***0,25pt***

③ Soit G la primitive de g qui prend la valeur 0 en 0

a **Etude de la parité de g**

On pose $h(x) = G(x) + G(-x)$

i. Montrer que h est continue et dérivable sur $]-1;1[$ ***0,5pt***

ii. Calculer la dérivée h' de h et $h(0)$ pui déduire la parité de h ***0,75pt***

b Bijection réciproque de f

Soit φ la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = G \circ f(x) - x$

i. Montrer que la fonction φ est constante ***0,5pt***

ii. Calculer $\varphi(0)$ puis conclure que $G \circ f(x) = x$ ***0,5pt***

iii. Conclure que G est la bijection réciproque de f ***0,5pt***

La fonction G ainsi définie est appellée la fonction arcsinus elle est notée $arcsin$

④ **a** Calculer $G(1)$; $G(\frac{1}{2})$, $G(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $G(-1)$ ***0,5pt***

b Etudier les variations de G et dresser son tableau de variation ***0,5pt***

c Construire C_f et C_G dans le même repère. ***75pt***

Partie B:

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. f est l'application du plan dans lui même qui à tout point $M(z = x + iy)$ associe le point $M'(z' = x' + iy')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y \end{cases}$

① **a** Montrer que f est une application affine ***0,25pt***

b Déterminer l'écriture complexe de f ***0,25pt***

c Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f ***0,75pt***

② On note Ω le point ivariant de f

a Montrer que $\Omega M' = \frac{1}{2}\Omega M$ ***0,25pt***

b Démontrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle ***0,5pt***

③ (M_n) est la suite de points du plan d'affixe z_n définie par $\begin{cases} z_0 = 1 + 4\sqrt{3} + 3i \\ M_{n+1} = f(M_n) \qquad \forall\ n\ \in\ \mathbb{N} \end{cases}$

a En utilisant la question précédente, Déterminer ΩM_n en fonction de n ***0,75pt***

b Placer le point M_0 construire M_1, M_2, M_3 et M_4 (On précisera la méthode de construction) ***0,5pt***

c Déterminer l'entier narurel n_0 tel que $\forall\ n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0,05$ ***0,5pt***

④ Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = M_nM_{n+1}$ et $I_n = d_0 + d_1 + ... + d_n$

a Calculer M_0M_1 ***0,5pt***

b Montrer que la suite (d_n) est géométrique ; Préciser sa raison ***0,5pt***

c Calculer I_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n$ ***0,5pt***

⑤ Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'isobarycentre des points $M_0, M_1, ..., M_n$.

a Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$ ***0,5pt***

b En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$ ***0,25pt***

2

2. ***« La musique est une mathématique sonore et la mathématique une musique silencieuse » Edouard Herriot***