LYCEE BILINGUE DE DSCHANG

Année Académique:2019-2020

Département de Mathématiques

Examinateur : **M. KITIO NANKIA**

BACCALAUREAT BLANC N°1

Epreuve : **MATHEMATIQUES**

Série : **C**

Durée : **04h00' ;** Coef : **6**

Cette épreuve comporte trois exercices et un problème toutes obligatoires

Exercice 1 : 03 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. On considère l'application f du paln dans lui-même qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $31x^2 + 21y^2 + 10xy\sqrt{3} + \left(36\sqrt{3} - 16\right)x + \left(16\sqrt{3} + 36\right)y = 12$ et (Γ') son image par f.

1. a) Déterminer l'écriture complexe de f. **0.25pt**
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. **0.5pt**
2. a) Montrer que l'équation de (Γ') est $2x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 3 = 0$. **0.5pt**
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ').(sommets, excentricité).
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).(sommets, excentricité). **0.75pt**
   d) Construire (Γ) et (Γ') dans le repère $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. **1pt**

Exercice 2 : 02.25 points

1. Résoudre dans Z², l'équation (E) : $8x + 9y + 10 = 0$. **0.5pt**
2. $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthogonal de l'espace. $(S): x + 2y - z + 2 = 0$ et $(\pi): 3x - y + 5z = 0$ sont deux plans.
   a) Montrer que (S) et (π) sont sécants suivant une droite (D) et montrer que A (1,-2,-1)∈(D). **0.5pt**
   b) Déterminer l'expression analytique du démi-tour d'axe (D). **0.75pt**
   c) Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'equation (E). **0.25pt**
   d) En déduire l'ensemble (F) des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs. **0.25pt**

Exercice 3: 04.75 points

I- Une urne contient 18 boules indiscernables au toucher parmi lesquelles ; 4 boules porte le numéro $\frac{4}{5}$, trois boules portent le numéro $\frac{1}{5}$, 6 boules portent le chiffre 1 et 5 boules portent le chiffre 2. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On nomme a le nombre porté par l'une des boules tirées et par b le nombre porté par l'autre boule tirée ($a > b$).

1. On définit pout tout entier naturel n deux suites (U_n) et (V_n) telles que : $U_{n+1} = aU_n + b$ et $V_n = U_n - 1$.
   Calculer la probabilité P_1 pour la suite (V_n) soit géométrique. **0.75pt**
2. On considère l'équation différentielle $(E): y'' - ay' + by = 0$. Quelle est la probabilité P_2 pour que la fonction $g: x \mapsto (Ax + B)e^x, (A;B) \in IR^2$ soit une solution de (E) ? **0.75pt**
3. On considère dans Z² l'équation $(E_0): ax + by = 1$. Quelle est la probabilité P_3 pour que (E_0) n'admette pas de solution ? **0.5pt**
4. On définit dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est $M = \begin{pmatrix} a - 3b & 2b \\ 2b & a \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité P_4 pour que f soit une projection vectorielle ? **0.75pt**

II- Soit (D) une droite affine, munie d'un repère $(O,\vec{\imath})$ et soient A et B deux points de (D) d'abscisses respectives a et b. Soient α et β deux nombres réels dont la somme est 1.

1. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), par ψ l'application qui à tout point $M \in$(D) associe le réel $\psi(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$.
   a) Exprimer $\psi(G)$ en fonction de $\psi(O)$ et OG². **0.5pt**

b) Exprimer en fonction de a, b, α et β le réel $\psi(O)$, l'abscisse g du point G et le réel $\psi(G)$. **0.75pt**

2. On suppose que : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs a et b avec les probabilité α et β respectivements.
   a) Calculer les espérances mathématiques E(X) de x et E(x²) de x². **0.5pt**
   b) Montrer que la variance de x est V(X)= $\psi(G)$. **0.25pt**

PROBLEME 10 points

PARTIE I : on considère la fonction numérique f_n définie sur IR par : $f_n(x) = \dfrac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$ où n désigne un nombre entier naturel. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ Etude des propriétés de f_0 ;

1. a) Dresser le tableau de variation de f_0. **0.5pt**
   b) Montrer que f_0 réalise une bijection de IR vers un intervalle K que l'on précisera et que pour tout x élément de K, on a : $f_0^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$; **0.75pt**
   c) Construire la courbe (C_0). **0.5pt**
2. Soient a et b deux nombres réels quelconques ; soit $g_{a;b}$ la fonction définie par : $g_{a;b}(x) = b + \ln\left(\dfrac{1-x-a}{x-a}\right)$ et $(C_{a;b})$ sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Donner l'ensemble de définition $D_{g_{a;b}}$ de la fonction $g_{a;b}$. **0.25pt**
   b) Montrer que pour tout $x \in D_{g_{a;b}}$, on a : $g_{a;b}(x) = b - f_0^{-1}(x-a)$. **0.25pt**
   c) En notant (C) la courbe représentative de f_0^{-1}, en déduire que $(C_{a;b})$ est l'image de (C) par la transformation du plan $\varphi_{a;b} = s \circ t$ où t est une translation et s une symétrie orthogonale que l'on précisera. **0.5pt**
   d) Pour quelles valeurs de a et b la transformation $\varphi_{a;b}$ est –elle une symétrie orthogonale ? **0.5pt**
   e) Construire $(C_{1;2})$ dans le même repère que que (C_0) sans étudier la fonction $g_{1;2}$. **0.75pt**

B/ Etude de la fonction f_n où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Montrer que les fonctions f_n sont décroissantes sur IR. **0.5pt**
2. Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}). **0.5pt**
3. Montrer que les courbes (C_n) passent par un point fixe A à préciser les coordonnées. **0.5pt**

C/ Etude des suites (U_n) et (V_n) définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ **où** $n \in \mathbb{N}$ **et** $V_n = \dfrac{U_{n-1}+U_n}{2}$ **où** $n \in \mathbb{N}$ **et** $n \geq 2$**.**

1. Calculer U_0 et donner une interprétation géométrique de ce résultat. **0.5pt**
2. A partir de B/2), donner le sens de variation de (U_n). **0.5pt**
3. a) Prouver que : $V_n = \dfrac{1-e^{-n+1}}{2(n-1)}$ et étudier la convergence de (V_n). **0.75pt**
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 \leq U_n \leq V_n$. **0.5pt**
   c) En déduire la convergence de la suite (U_n). **0.25pt**

PARTIE II : On considère sur $]0;+\infty[$ les équations différentielles $(E): xy' - (2x+1)y = 8x^2$ et $(E'): y' - 2y = 8$.

1. Démontrer que si y est une solution sur $]0;+\infty[$ de (E), alors la fonction qui à x associe $\dfrac{y(x)}{x}$ est une solution sur $]0;+\infty[$ de (E'). **0.5pt**
2. Démontrer que si y est une solution sur $]0;+\infty[$ de (E'), alors la fonction qui à x associe $xy(x)$ est une solution sur $]0;+\infty[$ de (E). **0.5pt**
3. Déterminer une fonction affine f solution de (E'). **0.5pt**
4. Résoudre alors l'équation (E') et en déduire la solution sur $]0;+\infty[$ de (E). **0.5pt**
5. Déterminer si elle existe la solution f sur $]0;+\infty[$ de (E) qui s'annule en ln2. **0.25pt**