

L'épreuve comporte deux exercices et un problème étalés sur deux pages numérotées de 1 à 2.



Exercice 1 [5 Points]

On considère l'équation $(E) : iz^3 + (3 + 3i)z^2 + (15 + 12i)z - 42 - 44i = 0$.

1. Justifier que (E) admet une solution réelle z_0 . [1pt]
2. Déterminer trois nombres complexes $a; b$ et c pour que $(E) \Leftrightarrow (z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0$. [0,5pt]
3. Déterminer les racines carrées de $72 - 54i$. [0,5pt]
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $iz^2 + (3 + 5i)z + 21 + 22i = 0$ et (E) . [0,5ptX2=1pt]
5. On considère les points $A(-4 - 3i); B(2); C(-1 + 6i)$ et $D(-4 + 6i)$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$.
 - a) Justifier la nature du triangle ABC . [1pt]
 - b) Démontrer que les points $A; B; C$ et D sont cocycliques et illustrer cette cocyclicité sur une figure. [1pt]

Exercice 2 [4 Points]

On considère l'application f du plan dans lui-même dont l'expression analytique est
$$\begin{cases} x' = 3x + y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + 3y + 4 \end{cases}$$

1. Justifier que l'écriture complexe de f est $z' = (3 - i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} + 4i$. [1pt]
2. Chercher la nature et les éléments caractéristiques de f . [1pt]
3. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$ soit imaginaire pur.
 - a) Déterminer une équation de (Γ) . [1pt]
 - b) Dédire une équation de (Γ') , image de (Γ) par f . [1pt]

PROBLEME [11 Points]

PARTIE A : [3,5 Points]

On considère les équations différentielles $(E) : y'' + 2y' + y = x - 1$ et $(E') : y'' + 2y' + y = 0$.

1. Résoudre (E') [0,5pt]

2. Déterminer un polynôme P de degré un qui est solution de (E) . [0,75pt]
3. Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
 - a) Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - P$ est solution de (E') . [0,75pt]
 - b) Déterminer la solution générale de (E) puis celle qui admet en $A(1; 1)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses. [0,5pt+1pt=1,5pt]

PARTIE B : [5,5 Points]



On considère la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1)e^{1-x} + x - 3$.

1. Calculer $f''(x)$, dresser le tableau de variations de f' et démontrer que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. [0,5ptX3=1,5pt]
2. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions parmi lesquelles 1 et l'autre notée α vérifie $2,25 < \alpha < 2,26$ [1pt]
3. Justifier que $f(\alpha) = \frac{2}{2\alpha-1} + \alpha - 2$ et que $0,81 < f(\alpha) < 0,83$ puis, dresser le tableau de variations de f . [2pts]
4. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé en prenant $2cm$ comme unité sur les axes. [1pt]

PARTIE C : [2 Points]

On pose pour tout entier naturel non nul n , $I_n = \int_0^n (2x + 1)e^{1-x} dx$.

1. En utilisant une intégration par parties ou en remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E) , calculer I_n en fonction de n . [1 pt]
2. Calculer la limite de la suite (I_n) . [0,5pt]
3. Interpréter graphiquement ce résultat. [0,5pt]

Examineur : NGUEFO Amour , *PLEG mathématiques*