

L'épreuve comporte trois exercices et un problème étalés sur deux pages numérotées de 1 à 2.



Exercice 1 [3 Points]

Soit P un entier naturel premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}^*/i < P$, $PC_{P-1}^{i-1} = iC_P^i$, puis que P divise C_P^i . [1pt]
2. Justifier que $\forall a; b \in \mathbb{Z}$, $(a + b)^P \equiv a^P + b^P [P]$. [0,5pt]
3. Justifier que $\forall a \in \mathbb{N}$, $a^P \equiv a [P]$. [0,5pt]
4. Dédire que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, si a et P sont premiers entre eux, alors $a^{P-1} \equiv 1 [P]$. [0,5pt]
5. Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^{126} par 127. [0,5pt]

Exercice 2 [3 Points]

Soit f une application du plan dans lui-même dont l'expression analytique est
$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{16}{5} \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture complexe de f . [0,5pt]
2. Montrer que f est une isométrie [0,75pt]
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f . [0,25pt]
4. Dédire la nature exacte et les éléments caractéristiques de f [1,5pt]

Exercice 3 [4 Points]

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0; I; J)$. Soient S la similitude directe plane de centre $A(1 - i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. On note (E) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $5x^2 + 5y^2 - 24x - 24y + 6xy + 20 = 0$ et (E') l'image de (E) par S .

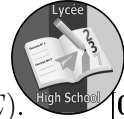
1. Déterminer l'expression analytique de S . [1pt]
2. Dédire une équation de (E') et le tracer dans le repère $(0; I; J)$. [1,5pt]
3. Dédire la nature et les éléments caractéristiques de (E) et le tracer sur la même figure précédente. [1,5pt]

PROBLEME [10 Points]

PARTIE A : [2,5 Points]

On considère les équations différentielles $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ et $(E') : y'' + 2y' + y = 0$.

1. Résoudre (E') [0,5pt]
2. Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E) . [0,5pt]
3. Soit h une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}
 - a) Démontrer que h est solution de (E') si et seulement si $h + g$ est solution de (E) . [0,5pt]
 - b) Déterminer la solution de (E) qui admet en $A(0; 4)$ une tangente parallèle à (OI) . [1pt]



PARTIE B : [3,5 Points]

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x+2)^2e^{-x}$ et (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative sur un repère orthogonal $(O; I; J)$ tel que $OI = 2OJ = 2cm$

1. Étudier et tracer avec soin (\mathcal{C}_f) . [1,5pt]
2. En remarquant que f est une solution de (E) , déterminer une primitive F de f sur \mathbb{R} . [0,5pt]
3. On pose pour tout entier naturel non nul n , $I_n = \int_0^n (x+2)^2e^{-x}dx$.
 - a) Exprimer I_n en fonction de n . [0,5pt]
 - b) Étudier la convergence de la suite (I_n) et interpréter graphiquement le résultat. [1pt]

PARTIE C : [4 Points]

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k+2n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{9-4e}{ne}$. [1 pt]
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}/k < n$, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. [1pt]
3. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \int_0^1 f(x)dx \leq u_n + \frac{4e-9}{ne}$. [1pt]
4. Dédurre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_1 + \frac{9-4e}{ne} \leq u_n \leq I_1$ et étudier la convergence de la suite (u_n) . [1pt]

Examineur : NGUEFO Amour , PLEG mathématiques