Ministère des Enseignements Secondaires
Collège Monseigneur François-Xavier VOGT

Examen : Baccalauréat blanc
Session : Mai 2018
Épreuve : Mathématiques
Série : C
Durée : 4 h Coefficient : 5

Exercice 1 : 4,5 points

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'\left(x', y'\right)$ tel que $\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$.

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $31x^2 + 21y^2 + 10xy\sqrt{3} + \left(36\sqrt{3} - 16\right)x + \left(16\sqrt{3} + 36\right)y = 12$ et (Γ') son image par f.

1- a) Déterminer l'écriture complexe de f. **0,5 pt**
   b) En déduire la nature et les caractéristiques de f. **0,5 pt**

2- a) Déterminer une équation de (Γ'). **0,5 pt**
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). **0,5 pt**
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ). **0,5 pt**
   d) Construire (Γ) et (Γ') dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **0,5 pt**

3) Soit M le point d'affixe z.
   a) Démontrer que l'ensemble des points M(z) tels que $z + \overline{z} - 6 = 0$ est une droite (D). **0,25 pt**
   b) Montrer que la distance du point M à la droite (D) est $\frac{1}{2}|z + \overline{z} - 6|$. **0,5 pt**
   c) Démontrer que l'ensemble des points M(z) tels que $\left|\frac{z - 2 + 3i}{z + \overline{z} - 6}\right| = \sqrt{3}$ est une conique dont on déterminera la nature, un foyer, une directrice et l'excentricité. **0,75 pt**

Exercice 2 : 1,5 point

1- a) Déterminer les entiers x et y tels que $14x - 31y = 3$. **0,5 pt**
   b) En déduire les couples (x, y) d'entiers premiers entre eux solutions de l'équation $14x - 31y = 3$. **0,5 pt**

2) Trois phares A, B et C lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, les 30 secondes et les 35 secondes. Un signal simultané se produit à 22 heures. À quelle heure se produira le premier signal simultané après minuit ? **0,5 pt**

Exercice 3 : 2,5 points

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires. Ces huit boules sont indiscernables au toucher.

1) On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
   a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche. **0,5 pt**
   b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages. **0,5 pt**

2) Soit n un nombre entier naturel. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. On désigne par P_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.
   a) Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4. **1 pt**
   b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer la limite de S_n. **0,5 pt**

Problème : 11,5 points

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$. **0,25 pt**

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
   a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1). **0,5 pt**
   b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de (1). **0,5 pt**
   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1). **0,25 pt**

3) Déterminer la solution de l'équation (1) dont la courbe passe par l'origine du repère. **0,5 pt**

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$. On pose $h(x) = 2\left(e^x - 1\right)$ et on définit la suite (u_n) par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$. **0,5 pt**

2) Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau des variations. **0,5 pt**

3) a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles dont l'une est 0 et l'autre est notée α. **0,5 pt**
   b) Montrer que $g(x) = 0$ équivaut à $x = h(x)$. **0,25 pt**
   c) Montrer que $-1,60 < \alpha < -1,59$. **0,5 pt**
   d) Montrer que $h\left([-2, -1]\right) \subset [-2, -1]$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-2, -1]$. **0,5 pt**
   e) Montrer que pour tout $x \in [-2, -1],\ |h'(x)| \leqslant 0,8$. **0,25 pt**
   f) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,8|u_n - \alpha|$. **0,25 pt**
   g) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leqslant (0,8)^n$. **0,25 pt**
   h) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. **0,5 pt**
   i) Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. **0,5 pt**

4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x. **0,25 pt**

Partie C : Étude de la fonction principale

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. **0,5 pt**

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Étudier le sens de variation de f. **0,5 pt**

3) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie B. **0,25 pt**

4) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. **0,5 pt**

5) Dresser le tableau des variations de f. **0,5 pt**

6) Étudier les branches infinies de la courbe de f. **0,5 pt**

7) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. **0,5 pt**

Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel strictement inférieur à α. Interpréter graphiquement l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^m f(x)\,dx$. **0,25 pt**

2) Calculer $\displaystyle\int_\alpha^m xe^x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties. **0,5 pt**

3) En déduire $\displaystyle\int_\alpha^m f(x)\,dx$. **0,5 pt**

4) Calculer la limite de $\displaystyle\int_\alpha^m f(x)\,dx$, lorsque m tend vers $-\infty$. **0,25 pt**