



## SUJET 5

*L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 3.*

*Le candidat devra obligatoirement traiter l'épreuve. La qualité et le soin apportés au tracé de la courbe seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.*

### **EXERCICE 1 :** (3.5pts)

Le tableau suivant donne la part des exportations dans le PIB marchand d'un pays (en %) pendant huit années.

$x_i$	1970	1974	1975	1981	1982	1985	1986	1996
$y_i$	18	22.2	22	26.3	25.2	27.5	26.5	35.8

Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine le point  $O(1970 ; 18)$

- 1) Représenter dans ce plan le nuage de points associé à cette série statistique...  
On prendra 1 cm pour 4 années sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2% sur l'axe des ordonnées. (1pt)
- 2) Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$  de ce nuage de points. (0.5pt)
- 3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Un ajustement affine de ce nuage est-il justifié ? (0.5pt)
- 4) Déterminer une équation de la droite  $(D)$  de régression de  $y$  en  $x$  par la méthode de moindres carrés. (0.75pt)
- 5) Faire une prévision du PIB Marchant pour l'année 2010. (0.5pt)

### **EXERCICE 2** (4pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

- 1- a) Calculer  $(1 - i)^2$  (0.25pt)  
b) En déduire les racines carrées de  $-2i$  (0.5pt)
- 2-  $(U_n)$  est une suite géométrique telle que  $U_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$  et  $U_4 = \sqrt{3} - i$   
Déterminer toutes les suites  $(U_n)$ . (0.5pt)
- 3- On considère celle de ces suites dont la raison a une partie réelle positive.
  - a) Déterminer la forme trigonométrique de  $U_{19}$ . (0,75pt)
  - b) Montrer que  $U_0 = \frac{1}{4}(-\sqrt{3} + i)$  (0.5pt)
  - c) Calculer la somme  $S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_5$  (0.5pt)
- 4- Soit  $A, B,$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $U_0, U_2, U_4$   
 $f$  la similitude directe du plan de centre  $B$  qui transforme  $A$  en  $C$ .
  - a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ . (0.5pt)
  - b) Donner l'angle et le rapport de la similitude  $f$ . (0.5pt)



**PROBLEME** : Les 3 parties sont indépendantes.

**Partie A : (2,5pts)**

On se propose de trouver les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  solutions de l'équation différentielle (E) :  $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -x + 2$

- 1) Déterminer une fonction affine  $g$  solutions de (E). (0.5pt)
- 2) Montrer que  $f$  est une solution de (E) si et seulement si  $f - g$  est une solution de l'équation (E') :  $y'' + 2y' + y = 0$ . (0.5pt)
- 3) a) Résoudre (E'). (0.5pt)  
b) En déduire les solutions de (E). (0.5pt)  
c) Déduire la solution de (E) dont la courbe admet au point d'abscisse 0 un extremum négatif égal à 4. (0.5pt)

**Partie B. (7,5pts)**

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(o, I, J)$  d'unité 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnées.  $g$  et  $f$  sont les fonctions définies sur  $]0 : +\infty[$  par  $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$  et  $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$  et  $(\mathcal{T})$  est la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

1. a) Etudier les variations de  $g$  sur  $]0 : +\infty[$  (1pt)  
b) Déterminer le signe de  $g$  sur  $]0 : +\infty[$  (0,25pt)
2. a) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  (0,5pt)  
b) Montrer que tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  (0,5pt)  
c) Des questions précédentes, déduire le signe de  $f'$  et dresser la table de variations de  $f$  (0,75pt)
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$  (1pt)
4. Soit (D) la droite d'équation  $y = 2x$ 
  - a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (T) et (D) (0,5pt)
  - b) Ecrire une équation de la tangente (T) à  $(\mathcal{T})$  au point d'abscisse 1 (0,5pt)  
Montrer que la droite (D) est asymptote à  $(\mathcal{T})$  (0,5pt)
  - c) Etudier la position de  $(\mathcal{T})$  et (D). (0,5pt)
5. Tracer (D), (T) et  $(\mathcal{T})$  dans un même repère (1pt)
6. Calculer l'aire de la Partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{T})$  la droite (D) et les droites d'équations  $x = \frac{1}{4}$  et  $x = 1$  (0,5pt)

**Partie C : (2.5pts)**

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules blanches et une boule verte. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

- 1) Quelle est la probabilité de chacun des évènements  
A « les trois boules sont de couleur différentes ? »  
B « Les trois boules n'ont que deux couleurs »  
C : « une au moins des trois boules est blanche » (0,75pt)



- 2) On considère le jeu suivant :
- Si on tire une boule rouge, on gagne 0F
  - Si on tire une boule blanche, on gagne 1F
  - Si on tire une boule verte, on gagne 3F

Soit  $X$  la variable qui a chaque tirage simultané de 3 boules, associe le gain du joueur

- a) Déterminer l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs de  $X$  (0,5pt)
- b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$  (0,75pt)
- c) Calculer l'Espérance mathématique de  $X$ . (0,5pt)