Ministère des Enseignements Secondaires — **Examen : Baccalauréat blanc Série C**

Office du Baccalauréat du Cameroun — **session avril 2020**

Collège polyvalent de Bepanda — **Epreuve : Mathématiques**

Enseignant : CHEMEGNI Guy M. — **Durée : 4 heures Coefficient : 5**

SUJET 7

EXERCICE I 6,5 points

Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. on désigne par V, l'ensemble des vecteurs du plan.

On considère la famille de courbes (C_λ) : $y^2 + (\lambda - 1)x^2 + 4x - 4 = 0$ et on considère le point O'(3 ; 3)

1) Démontrer que : quand λ décrit IR, toutes les courbes (C_λ) passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées. 0,25pt

2) a) Démontrer que : (C_1) est une parabole dont on précisera les éléments géométriques remarquables. 0,75pt

b) Tracer (C_1) et placer A et B. 0,5pt

3) a) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles :

(i) (C_λ) est une hyperbole. 0,25pt

(ii) (C_λ) est une ellipse. 0,25pt

b) Tracer dans le repère précédent, les courbes (C_{-3}) et (C_3). (On précisera les éléments géométriques remarquables de ces courbes) 1,25pt

A- Soit φ l'endomorphisme de V défini par : $\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = -\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = -\vec{i} \end{cases}$ et soit f l'application de P dans P qui à tout point M(x ; y) associe le point M'(x', y') tel que : $\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$

1. a) Déterminer la matrice de φ dan la base $(\vec{i}, \vec{j})$. 0,25pt

b) Déterminer le noyau Kerφ et l'image Imφ de φ. 0,5pt

2. On pose : $E = \{\vec{u}(x; y) \in V, \varphi(\vec{u}) = \vec{u}\}$

$F = \{\vec{u}(x; y) \in V, \varphi(\vec{u}) = -\vec{u}\}$

a. Démontrer que E et F sont des droites vectorielles de V. On précisera une base $(\vec{e_1})$ de E et une base $(\vec{e_2})$ de F. 0,5pt

b. Démontrer que : $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de V. Que peut-on en déduire pour E et F par rapport à V ? 0,5pt

c. Donner la matrice de φ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ 0,25pt

3. a) Démontrer que : $\begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$ 0,25pt

b) Donner l'écriture complexe de f et démontrer que f est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe Δ. 0,5pt

4. Déterminer une équation cartésienne de (C'_{-3}) de (C_{-3}) par f. 0,5pt

EXERCICE II: (4pts)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et parmi lesquelles 2 portent le numéro – 1 ; une porte le numéro 1 ; 3 porte le numéro – 2 et 4 portent le numéro 2

On extrait au hasard , successivement et sans remise 2 boules de cette urne. On note a le résultat obtenu au 1er tirage et b celui obtenu au 2e tirage. On considère alors :

- L'endomorphisme f d'un plan vectoriel E dont la matrice dans une base donnée est $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$
- Le nombre complexe z = a + ib
- L'équation différentielle (E) : ay' + by = 0
- L'équation diophantienne (F) : 2ax – 3by = 1 , où les inconnues x et y sont des entiers relatifs

1) a) Déterminer tous les couples (a , b) pour lesquels le couple (1 , 1) est solution de (F)

b) Quelle est la probabilité pour que le couple (1 , 1) soit solution de (F) ?

2) a) Quelles sont sous forme algébrique les racines carrées de - 3 + 4i ?
b)Quelle est la probabilité pour que le nombre complexe z = a + ib soit une racice carrée de - 3 + 4i ?

3) a) Quelle est la solution générale de l'équation différentielle (E) ?
b) Quelle est la probabilité pour que la fonction f définie dans IR par $f(x) = e^{2x}$ soit une solution de (E) sur IR ?

4) a) Quelle relation y a-t-il entre q et b pour que l'on ait Kerf $= \{\vec{O}\}$
b) En déduire que l'événement ‘' f est un isomorphisme de E ‘' est un événement certain

PROBLEME **9,5 points** ***La partie C est indépendante des parties A et B qui sont liées.***

PARTIE A

On donne la fonction g définie dans IR par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln x$

1) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation 1pt
2) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution a dans]0 , +∞[puis que l'on a ; $1{,}89 < a < 1{,}9$. 0,75pt
3) En déduire le signe de g 0,25pt

PARTIE B

On donne les fonctions f et F définies dans IR par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation 0,75pt
2) a)Que représente la fonction F pour f ? 0,25pt
b)Justifier que F est dérivable sur]0 , +∞[; Préciser F'(x) et en déduire le sens de variation de la fonction F 0,75pt
c) Justifier que pour tout t ≥ 1 , on a $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$ 0,5pt
d) Pour x > 0 , on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$
i) Par une intégration par parties , calculer I(x) 0,5pt
ii) En remarquant que pour tout t > 0 , $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$
Calculer J(x) à l'aide intégration par parties. 0,5pt
e) i)En déduire pour tout x> 1 , $\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ 0,5pt
ii) On admet que F admet une limite L lorsque x tend vers +∞ .
Montrer que $\ln 2 \leq L \leq 1$ 0,5pt
f) Soit G définie dans]0 , +∞[par $G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$
i)justifier que G est dérivable sur]0 , +∞[et montrer que pour tout x> 0 , G'(x) = 0 0,5pt
ii) En déduire que pour tout x> 0 , G(x) = 0 0,25pt
iii) En déduire la limite de F en 0 par valeurs supérieur. 0,25pt

PARTIE C

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , I , J). On considère la fonction h définie dans IR par $h(x) = xe^{-x}$

1) Montrer que pour tout réel x , h''(x)+2h'(x)+h(x) = 0 et en déduire une primitive de h sur IR 0,5pt+0,25pt
2) Soit (D) le domaine du plan délimité par pa courbe (C) de la fonction h , l'axe des abscisses , les droites d'équations respectives x = - 1 et x = 2
a) Calculer l'aire en unité d'aire de ce domaine 0,5pt
b) Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction H : $x \to (ax^2+bx+c)e^{-2x}$ soit une primitive sur IR de la fonction j : $x \to x^2e^{-2x}$ 0,5pt
c) La rotation du domaine (D) autour de l'axe des abscisses engendre un solide de révolution(S) .Calculer le volume en unité de volume de ce solide. 0,5pt