SESSION 2011

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE EPREUVE. FILIÈRE PC

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler

1) Soient a et b deux réels. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité de l'énoncé est immédiate.

Supposons que $a > 0$ et $b > 0$. La fonction ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$. Donc la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\ln(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda \ln a + (1-\lambda) \ln b,$$

puis par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\lambda a + (1-\lambda)b = e^{\ln(\lambda a+(1-\lambda)b)} \geqslant e^{\lambda \ln a+(1-\lambda)\ln b} = a^{\lambda}b^{1-\lambda}.$$

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda a + (1-\lambda)b \geqslant a^{\lambda}b^{1-\lambda}.}$$

Soit $u > 1$. La fonction $f\ :\ x \mapsto x^u$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f''(x) = u(u-1)x^{u-2} > 0$. Donc la fonction f est convexe sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^u = f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) = \lambda a^u + (1-\lambda)b^u,$$

Cette inégalité étant vraie si $a = 0$ ou $b = 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ (\lambda a + (1-\lambda)b)^u \geqslant \lambda a^u + (1-\lambda)b^u.}$$

2) Soient $\lambda \in]0, 1[$ et $(a, b) \in [0, +\infty[^2$. L'inégalité de l'énoncé est vraie si $a = 0$ ou $b = 0$. Supposons $a > 0$ et $b > 0$ et posons $f(x) = (a + x)^{\lambda} - a^{\lambda} - x^{\lambda}$ pour $x \geqslant 0$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \lambda\left((a + x)^{\lambda-1} - x^{\lambda-1}\right).$$

Puisque $\lambda - 1 < 0$, la fonction $t \mapsto t^{\lambda-1}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$. Par suite, la fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ puis sur $[0, +\infty[$ par continuité de f en 0. On en déduit que

$$(a + b)^{\lambda} - a^{\lambda} - b^{\lambda} = f(b) \leqslant f(0) = 0.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ (a+b)^{\lambda} \leqslant a^{\lambda} + b^{\lambda}.}$$

3) Puisque f est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, F existe dans $\mathbb{R}$. Puisque f est une fonction continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}$, F est un réel strictement positif.

Puisque la fonction f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\Phi\ :\ u \mapsto \dfrac{1}{F}\displaystyle\int_{-\infty}^{u} f(x)\ dx$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel u, $\Phi'(u) = f(u) > 0$. Donc la fonction Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\displaystyle\lim_{u\to-\infty} \Phi(u), \lim_{u\to+\infty} \Phi(u)\right[=]0, 1[$ (on note encore Φ cette bijection). Par suite, pour tout réel $t \in]0, 1[$, il existe un et un seul réel noté $u(t)$ tel que $\Phi(u(t)) = t$.

On a montré que pour tout réel $t \in]0, 1[$, il existe un et un seul réel noté $u(t)$ tel que $\dfrac{1}{F}\displaystyle\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)\ dx = t$. De même, pour tout réel $t \in]0, 1[$, il existe un et un seul réel noté $v(t)$ tel que $\dfrac{1}{G}\displaystyle\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)\ dx = t$.

4) La fonction u est la fonction Φ^{-1}. Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel u, $\Phi'(u) = \dfrac{1}{F}f(u)$. Par hypothèse, la fonction $\Phi' = \dfrac{1}{F}f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on sait alors que la fonction $u = \Phi^{-1}$ est de classe C^1 sur $]0, 1[$ et pour tout $t \in]0, 1[$,

$$u'(t) = \left(\Phi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(t))} = \frac{1}{\frac{1}{F}f(u(t))} = \frac{F}{f(u(t))}.$$

De même, la fonction v est de classe C^1 sur $]0,1[$ et pour tout réel $t \in]0,1[$, $v'(t) = \dfrac{G}{g(v(t))}$.

5) Puisque $\lim\limits_{u\to-\infty} \Phi(u) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t) = -\infty$ et puisque $\lim\limits_{u\to+\infty} \Phi(u) = 1$, $\lim\limits_{t\to 1^-} u(t) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{t\to 0^+} v(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} v(t) = +\infty$. Mais alors, puisque $\lambda > 0$ et $1-\lambda > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} w(t) = -\infty \text{ et } \lim_{t\to 1^-} x(t) = +\infty.$$

u et v sont de classe C^1 sur $]0,1[$, il en est de même de w. Puisque $u' = \dfrac{F}{f\circ u}$ et $v' = \dfrac{G}{g\circ v}$ sont des fonctions strictement positives sur $]0,1[$, il en est de même de $w' = \lambda u' + (1-\lambda)v'$. Ainsi, la fonction w est de classe C^1 sur $]0,1[$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0,1[$. On sait alors que w est un C^1-difféomorphisme de $]0,1[$ sur $\left]\lim\limits_{t\to 0^+} w(t), \lim\limits_{t\to 1^-} w(t)\right[= \mathbb{R}$ ou encore w est un chagement de variable de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. En effectuant ce changement de variables, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)\, dw &= \int_0^1 h(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t))(\lambda u'(t) + (1-\lambda)v'(t))\, dt \\
&\geqslant \int_0^1 f(u(t))^\lambda (g(v(t))^{1-\lambda} \left(\lambda \frac{F}{f(u(t))} + (1-\lambda)\frac{G}{g(v(t))}\right) dt \text{ (par hypothèse et d'après 4))} \\
&\geqslant \int_0^1 f(u(t))^\lambda (g(v(t))^{1-\lambda} \left(\frac{F}{f(u(t))}\right)^\lambda \left(\frac{G}{g(v(t))}\right)^{1-\lambda} dt \text{ (d'après 1))} \\
&= F^\lambda G^{1-\lambda} \int_0^1 dt \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx\right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

6) La fonction $t \mapsto t^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Par suite, $(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$ puis par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) = e^{-(\lambda x+(1-\lambda)y)^2} \geqslant e^{-\lambda x^2 - (1-\lambda)y^2} = \left(e^{-x^2}\right)^\lambda \left(e^{-y^2}\right)^{1-\lambda} = \Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda}.$$

7) Si $|z| \leqslant \widehat{M}$, $\Psi_M(z) = 1 \geqslant e^{-x^2} = \Psi(x)$.
Soit $z \in]-\infty, -\widehat{M}[\cup]\widehat{M}, +\infty[$. On a

$$|z| = |\lambda x + (1-\lambda)y| \leqslant \lambda|x| + (1-\lambda)|y| \leqslant \lambda|x| + (1-\lambda)M \leqslant \lambda|x| + \widehat{M}$$

et donc $0 < \dfrac{|z| - \widehat{M}}{\Theta} \leqslant \dfrac{\lambda|x|}{\Theta} \leqslant |x|$ puis

$$\Psi_M(z) = e^{-\left(\frac{|z|-\widehat{M}}{\Theta}\right)^2} \geqslant e^{-|x|^2} = \Psi(x).$$

Dans tous les cas, si $|y| \leqslant M$, on a $\Psi_M(z) \geqslant \Psi(x)$. En échangeant les rôles de x et y et en remplaçant λ par $1-\lambda$ de sorte que Θ et $\widehat{M}$ sont inchangés, on a aussi : si $|x| \leqslant M$, $\Psi_M(z) \geqslant \Psi(y)$.

8) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} &= (f(x) + \epsilon\Psi(x))^\lambda (g(y) + \epsilon\Psi(y))^{1-\lambda} \\
&\leqslant \left(f(x)^\lambda + \epsilon^\lambda \Psi(x)^\lambda\right)\left(g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}\right) \text{ (d'après la question 2)} \\
&= f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \left(\epsilon^\lambda \Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda} f(x)^\lambda\right) + \epsilon\Psi(x)^\lambda\Psi(y)^{1-\lambda} \\
&\leqslant h(z) + \left(\epsilon^\lambda \Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda} f(x)^\lambda\right) + \epsilon\Psi(z) \text{ (par hypothèse et d'après 6))} \\
&\leqslant h(z) + \epsilon^\wedge \left(\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \Psi(y)^{1-\lambda} f(x)^\lambda\right) + \epsilon\Psi(z) \text{ (car } \epsilon \in]0,1[).
\end{aligned}$$

Si maintenant, $|x| \leqslant M$, alors $\Psi(y) \leqslant \Psi_M(z)$ d'après la question précédente puis $\Psi(y)^{1-\lambda} \leqslant \Psi_M(z)^{1-\lambda} \leqslant \Psi_M(z)^\wedge$ car $\Psi_M(z) \in]0,1]$ et donc $\Psi(y)^{1-\lambda} f(x)^\lambda \leqslant \Psi_M(z)^\wedge \|f\|_\infty^\lambda$.

Si $|x| > M$, $\Psi(y)^{1-\lambda}f(x)^\lambda = 0 \leqslant \Psi_M(z)^\wedge\|f\|_\infty^\lambda$.

En résumé, pour tout réel x, $\Psi(y)^{1-\lambda}f(x)^\lambda \leqslant \Psi_M(z)^\wedge\|f\|_\infty^\lambda$. De même, pour tout réel y, $\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leqslant \Psi_M(z)^\wedge\|g\|_\infty^{1-\lambda}$ et finalement

$$f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leqslant h(z) + \epsilon^\wedge\left(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda}\right)\Psi_M(z)^\wedge + \epsilon\Psi(z).$$

9) La fonction Ψ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $\epsilon \in]0,1[$, les fonctions f_ϵ et g_ϵ sont strictement positives sur $\mathbb{R}$. Soit h_ϵ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h_\epsilon(t) = h(t) + \epsilon^\wedge\left(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda}\right)\Psi_M(t)^\wedge + \epsilon\Psi(t).$$

D'après la question 8), pour tout $\epsilon \in]0,1[$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in]0,1[$, $h_\epsilon(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda}$. D'autre part, les fonctions f_ϵ, g_ϵ et h_ϵ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Enfin, les fonctions Ψ et Ψ_M sont intégrables sur $\mathbb{R}$ car continues sur $\mathbb{R}$ et négligeables en $+\infty$ ou $-\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Par suite, les onctions f_ϵ, g_ϵ et h_ϵ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

D'après la question 5),

$$\forall \epsilon \in]0,1[,\ \int_{-\infty}^{+\infty} h_\epsilon(x)\,dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\,dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(x)\,dx\right)^{1-\lambda}.$$

Maintenant, $\forall \epsilon \in]0,1[$, $f_\epsilon \geqslant f$ et $g_\epsilon \geqslant g$. Par suite, pour tout $\epsilon \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx\right)^{1-\lambda} &\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\,dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(x)\,dx\right)^{1-\lambda}\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx + \epsilon^\wedge(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_M(x)^\wedge\,dx + \epsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Quand ϵ tend vers 0, on obtient de nouveau $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right)^\lambda \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx\right)^{1-\lambda} \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$.

10) On note tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \chi_n(x) \leqslant 1$. La fonction χ_n est affine sur $[n, n+1]$ et en particulier est monotone sur $[n, n+1]$ monotone. Comme $\chi_n(n) = 1$ et $\chi_n(n+1) = 0$, pour tout $x \in [n, n+1]$, $0 \leqslant \chi_n(x) \leqslant 1$. D'autre part, cet encadrement est immédiat si $0 \leqslant x \leqslant n$ ou si $x \geqslant n+1$. Donc, pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \chi_n(x) \leqslant 1$ et finalement, la fonction χ_n étant paire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant /chi_n(x) \leqslant 1$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $|x| \geqslant n+1$ ou $|y| \geqslant n+1$, $\chi_n(x)^\lambda\chi_n(y)^{1-\lambda} = 0 \leqslant \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y)$.
- Si $|x| \leqslant n+1$ et $|y| \leqslant n+1$, alors $|\lambda x + (1-\lambda)y| \leqslant \lambda|x| + (1-\lambda)|y| \leqslant n+1$ et donc $\chi_n(x)^\lambda\chi_n(y)^{1-\lambda} \leqslant 1 = \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y)$.

Dans tous les cas, $\chi_n(x)^\lambda\chi_n(y)^{1-\lambda} \leqslant \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y)$.

11) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, posons $f_n(x) = f(x)\chi_n(x)$, $g_n(y) = g(y)\chi_n(y)$ et $h_n(x) = h(z)\chi_{n+1}(z)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la χ_n est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et donc les fonctions f_n, g_n et h_n sont continues et positives sur $\mathbb{R}$.
- Puisque $0 \leqslant f_n \leqslant f$ et que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $\mathbb{R}$. De même, chaque fonction g_n et chaque fonction h_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d'après la question précédente,

$$f_n(x)^\lambda g_n(y)^{1-\lambda} = f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}\chi_n(x)^\lambda\chi_n(y)^{1-\lambda} \leqslant h(\lambda x + (1-\lambda)y)\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) = h_n(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Comme chaque fonction f_n et chaque fonction g_n est nulle en dehors d'un intervalle borné, la question 9) permet d'affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx\right)^{1-\lambda}.\ (*)$$

Vérifions alors que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, pour $n \geqslant |x|$, on a $\chi_n(x) = 1$ et donc $f_n(x) = f(x)$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Ainsi,

- Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$ et la fonction limite f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| = f_n \leqslant f$ où f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$. De même, les suites $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\ dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont pour limites respectives $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ dx$.

On fait alors tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$ et on obtient l'inégalité " P-L " dans le cas général :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx\right)^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx\right)^{1-\lambda}.$$

Partie II. Fonctions log-concaves

12) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme N. On sait que la fonction N est continue sur $\mathbb{R}^n$ (car 1-Lipschitzienne) à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qua la fonction Ψ est continue sur $\mathbb{R}$. Par suite, la fonction $f = \Psi \circ N$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in]0, 1[$.

$$N(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant N(\lambda x) + N((1-\lambda)y) = \lambda N(x) + (1-\lambda)N(y),$$

puis

$$(N(\lambda x + (1-\lambda)y))^2 \leqslant (\lambda N(x) + (1-\lambda)N(y))^2 \leqslant \lambda N(x)^2 + (1-\lambda)N(y)^2,$$

car la fonction $t \mapsto t^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = e^{-(N(\lambda x+(1-\lambda)y))^2} \geqslant e^{-\lambda N(x)^2-(1-\lambda)N(y)^2} = (e^{-N(x)^2})^{\lambda}(e^{-N(y)^2})^{1-\lambda} = f(x)^{\lambda}f(y)^{1-\lambda}.$$

Par suite, la fonction f est log-concave.

Partie III. Quelques applications géométriques

13) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\ dy$, $G(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y)\ dy$ et $H(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y)\ dy$. Il s'agit de vérifier que $\int_{\mathbb{R}} H(x)\ dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} F(x)\ dx\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}} G(x)\ dx\right)^{1-\lambda}$.

Pour cela, il suffit de vérifier que les fonctions F, G et H sont continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$ et que de plus, pour tout $(x, y)\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in]0, 1[$, $H(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant F(x)^{\lambda}G(y)^{1-\lambda}$ puis d'appliquer l'inégalité " P-L ".

Soit M un réel positif tel que le carré $[-M, M]^2$ contienne les supports des fonctions f, g et h. Puisque f est continue sur le compact $[-M, M]^2$ et nulle en dehors de $[-M, M]^2$, f admet sur $\mathbb{R}^2$ une borne supérieure réelle notée $\|f\|_{\infty}$. De même, les fonctions g et h admettent sur $\mathbb{R}^2$ une borne supérieure réelle.

• Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
• Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• Pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x, y)| = f(x, y) \leqslant \|f\|_{\infty}\chi_{[-M,M]} = \varphi(y)$ ($\chi_{[-M,M]}$ désignant la fonction caractéristique de $[-M, M]$) où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$. De même, les fonctions G et H sont continues sur $\mathbb{R}$.

La fonction F est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et d'après le résultat admis dans le préliminaire de la question 13.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in]0, 1[$. Par hypothèse, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$h((\lambda x_0 + (1-\lambda)x_0, z)) = h(\lambda(x_0, z) + (1-\lambda)(y_0, z)) \geqslant f(x_0, z)^{\lambda}g(y_0, z)^{1-\lambda}.$$

On peut appliquer l'inégalité " P-L " aux trois fonctions $z \mapsto f(x_0, z)$, $z \mapsto g(y_0, z)$ et $z \mapsto h(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0, z)$ et on obtient

$$H(\lambda x_0+(1-\lambda)y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda x_0+(1-\lambda)y_0,z)\ dz\geqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0,z)\ dz\right)^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(y_0,z)\ dz\right)^{1-\lambda}\lambda=F(x_0)^{\lambda}G(y_0)^{1-\lambda}.$$

Finalement, on peut appliquer l'inégalité " P-L " aux trois fonctions F, G et H et on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}h(x,y)\ dxdy&=\int_{-\infty}^{+\infty}H(x)\ dx\\&\geqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\ dx\right)^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)\ dx\right)^{1-\lambda}=\left(\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\ dxdy\right)^{\lambda}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}g(x,y)\ dxdy\right)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

14) Puisque $\mathcal{A}$ est une partie bornée, il existe un réel positif M tel que $\mathcal{A}\subset[-M,M]^2$. Soit $f\in C(\mathcal{A})$. f est donc nulle en dehors de $[-M,M]$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\ dxdy=\iint_{[-M,M]^2}f(x,y)\ dxdy\leqslant\iint_{[-M,M]^2}1\ dxdy=4M^2.$$

Par suite, $\left\{\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\ dxdy,\ f\in C(\mathcal{A})\right\}$ est une partie non vide (car contient 0) et majorée (par $4M^2$) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\left\{\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\ dxdy,\ f\in C(\mathcal{A})\right\}$ admet une borne supérieure réelle.

15) Soit $\mathcal{A}=]a,b[\times]c,d[$. Pour tout $f\in C(\mathcal{A})$,

$$\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\ dxdy=\iint_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)\ dxdy\leqslant\iint_{[a,b]\times[c,d]}1\ dxdy=(b-a)(c-d).$$

On en déduit que $V(]a,b[\times]c,d[)\leqslant(b-a)(d-c)$.

Soient $\varepsilon\in]0,\text{Min}\{(b-a)/2,(c-d)/2\}[$ puis ϕ (resp. φ) la fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,a]\cup[b,+\infty[$ resp. $]-\infty,c]\cup[d,+\infty[$, égale à 1 sur $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ (resp. $[c+\varepsilon,d-\varepsilon]$) et affine sur $[a,a+\varepsilon]$ et sur $[b-\varepsilon,b]$ (resp. $[c,c+\varepsilon]$ et sur $[d-\varepsilon,d]$).
La fonction f telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\phi(x)\varphi(y)$ est un élément de $C(\mathcal{A})$ et donc

$$\begin{aligned}V(]a,b[\times]c,d[)&\geqslant\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\ dxdy\\&\geqslant\iint_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\times[c+\varepsilon,d-\varepsilon]}f(x,y)\ dxdy=\iint_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\times[c+\varepsilon,d-\varepsilon]}1\ dxdy=(b-a-2\varepsilon)(d-c-2\varepsilon).\end{aligned}$$

En résumé, $\forall\varepsilon\in]0,\text{Min}\{(b-a)/2,(c-d)/2\}[$, $(b-a-2\varepsilon)(d-c-2\varepsilon)\leqslant V(]a,b[\times]c,d[)\leqslant(b-a)(d-c)$. Quand ε tend vers 0, on obtient

$$\boxed{V(]a,b[\times]c,d[)=(b-a)(d-c).}$$

$V(]a,b[\times]c,d[)$ est l'aire du rectangle ouvert $]a,b[\times]c,d[$.

16) On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme quelconque N.

Vérifions que $\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. Il existe un réel positif $M_{\mathcal{A}}$ (resp. $M_{\mathcal{B}}$) tel que pour tout $X\in\mathcal{A}$, (resp. $Y\in\mathcal{B}$), on a $N(X)\leqslant M_{\mathcal{A}}$ (resp. $N(Y)\leqslant M_{\mathcal{B}}$). Pour tout $(X,Y)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, on a alors

$$N(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leqslant\lambda N(X)+(1-\lambda)N(Y)\leqslant\lambda M_{\mathcal{A}}+(1-\lambda)M_{\mathcal{B}}.$$

Donc $\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

Vérifions que $\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $Z_0\in\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B}$. Il existe $X_0\in\mathcal{A}$ et $Y_0\in\mathcal{B}$ tel que $Z_0=\lambda X_0+(1-\lambda)Y_0$.
Puisque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des ouverts, il existe un réel strictement positif r tel que la boule ouverte de centre X_0 et de rayon r soit contenue dans $\mathcal{A}$ et la boule ouverte de centre Y_0 et de rayon r soit contenue dans $\mathcal{B}$.

Vérifions que la boule ouverte B de centre Z_0 et de rayon r est contenue dans $\lambda\mathcal{A}+(1-\lambda)\mathcal{B}$. Soit Z un élément de B.
Soient $X=X_0+(Z-Z_0)$ puis $Y=\dfrac{1}{1-\lambda}(Z-\lambda X)$.
Déjà, on a $Z=\lambda X+(1-\lambda)Y$. Ensuite, $\|X-X_0\|=\|Z-Z_0\|<r$ et donc X est dans la boule ouverte de centre X_0 et de rayon r et en particulier $X\in\mathcal{A}$.

Enfin, $Y - Y_0 = \dfrac{1}{1-\lambda}((Z - Z_0) - \lambda(X - X_0)) = \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda}(Z - Z_0) = Z - Z_0$ puis $\|Y - Y_0\| = \|Z - Z_0\| < r$ et donc $Y \in \mathcal{B}$.

En résumé, pour tout élément Z de la boule B, il existe $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{B}$ tel que $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$. On en déduit que $B \subset \lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$. On a ainsi monré que $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ est voisinage de chacun de ses points et donc que $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soient $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$. Pour $Z \in \mathbb{R}^2$, on pose $h(Z) = \sup\{f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda},\ X, Y \in \mathbb{R}^2,\ Z = \lambda X + (1-\lambda)Y\}$.
D'après le résultat admis par l'énoncé, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^2$. Soit $Z \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$,

$$0 \leqslant f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda} \leqslant 1^\lambda 1^{1-\lambda} = 1,$$

et donc $0 \leqslant h(Z) = \sup\{f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda},\ X, Y \in \mathbb{R}^2,\ Z - \lambda X + (1-\lambda)Y\} \leqslant 1$. Ainsi, h est à valeurs dans $[0, 1]$.

Soit $Z \notin \lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$. S'il existe $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Z = \lambda X_0 + (1-\lambda)Y_0$ et $f(X_0)^\lambda g(Y_0)^{1-\lambda} > 0$, alors $f(X_0) \neq 0$ et $g(Y_0) \neq 0$ puis $X_0 \in \mathcal{A}$ et $Y_0 \in \mathcal{B}$ puis $Z \in \lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ ce qui est une contradiction. Donc, pour tout couple $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$, on a $f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda} = 0$ puis $h(Z) = 0$. Ainsi, la fonction h est nulle en dehors de $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$.

En résumé, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $[0, 1]$ et nulle en dehors de $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ et donc la fonction h est un élément de $C(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$. On en déduit que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y)\ dxdy \leqslant V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}).$$

D'autre part, pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$h(\lambda X_0 + (1-\lambda)Y_0) = \sup\{f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda},\ X, Y \in \mathbb{R}^2,\ \lambda X_0 + (1-\lambda)Y_0 = \lambda X + (1-\lambda)Y\} \geqslant f(X_0)^\lambda g(Y_0)^{1-\lambda}.$$

On peut donc appliquer l'inégalité " P-L " aux fonctions f, g et h. On obtient

$$\left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\ dx\right)^\lambda \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\ dx\right)^{1-\lambda} \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y)\ dxdy \leqslant V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}).$$

Ainsi, pour tout $(f, g) \in C(\mathcal{A}) \times C(\mathcal{B})$, $\left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\ dx\right)^\lambda \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\ dx\right)^{1-\lambda} \leqslant V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$.

Soit $f \in C(\mathcal{A})$. $V(\mathcal{B})$ est le plus petit des majorants de $\left\{\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\ dx,\ g \in C(\mathcal{B})\right\}$ et donc $\left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\ dx\right)^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda}$ est le plus petit des majorants de $\left\{\left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\ dx\right)^\lambda \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\ dx\right)^{1-\lambda},\ g \in C(\mathcal{B})\right\}$.

Par suite, pour tout $f \in C(A)$, $\left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\ dx\right)^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda} \leqslant V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$. En pratiquant de même sur f, on obtient $V(\mathcal{A})^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda} \leqslant V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$.

17) On pratique exactement de la même façon en remplaçant les fonctions f, g et h de la question précédente par fu, gu et hu respectivement ce qui est licite puisque entre autres, pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$

$$h(\lambda X + (1-\lambda)Y)u(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geqslant (f(X)u(X))^\lambda (g(Y)u(Y))^{1-\lambda}.$$

