SESSION 2011

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME EPREUVE. FILIÈRE MP

A. Préliminaire

1) $j^4 + j^2 + 1 = \dfrac{j^6 - 1}{j^2 - 1} = \dfrac{1 - 1}{j^2 - 1} = 0.$

$$\boxed{j^4 + j^2 + 1 = 0.}$$

2) Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \end{vmatrix}$$
$$= X^2(X^2 + 1) + 1 = X^4 + X^2 + 1.$$

j est racine de χ_A et donc, puisque χ_A est pair et à coefficients réels, $-j$, j^2 et $-j^2$ sont aussi racines de χ_A. Ainsi, A admet quatre valeurs propres simples à savoir j, j^2, $-j$ et $-j^2$ et donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A - jI_4) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -jx + y = 0 \\ -jy + z = 0 \\ -jz + t = 0 \\ -x - z - jt = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = jx \\ z = j^2x \\ t = x \end{array}\right.$$

Donc $\mathrm{Ker}(A - jI_4) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un calcul conjugué fournit aussi $\mathrm{Ker}(A - j^2I_4) = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$.

En remplaçant j par $-j$ dans les calculs précédents, on obtient $\mathrm{Ker}(A + jI_4) = \mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j^2 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis

$\mathrm{Ker}(A + j^2I_4) = \mathrm{Vect}(e_4)$ où $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -j^2 \\ j \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, si $D = \mathrm{diag}(j, j^2, -j, -j^2)$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & j^2 & -j & -j^2 \\ j^2 & j & j^2 & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $U^{-1}AU = D$.

3) Posons $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ puis $Y = U^{-1}X = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ de sorte que $X = UY$.

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = UDU^{-1}X \Leftrightarrow UX' = DUX \Leftrightarrow (UX)' = D(UX) \Leftrightarrow Y' = DY$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1' = jy_1 \\ y_2 = j^2y_2 \\ y_3' = -jy_3 \\ y_4 = -j^2y_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{C}^4/\ \forall t \in I,\ Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{jt} \\ \alpha_2 e^{j^2 t} \\ \alpha_3 e^{-jt} \\ \alpha_4 e^{-j^2 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{C}^4/\ \forall t \in I,\ X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & j^2 & -j & -j^2 \\ j^2 & j & j^2 & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{jt} \\ \alpha_2 e^{j^2 t} \\ \alpha_3 e^{-jt} \\ \alpha_4 e^{-j^2 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{C}^4/\ \forall t \in I,\ X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} + \alpha_3 e^{-jt} + \alpha_4 e^{-j^2 t} \\ j\alpha_1 e^{jt} + j^2\alpha_2 e^{j^2 t} - j\alpha_3 e^{-jt} - j^2\alpha_4 e^{-j^2 t} \\ j^2\alpha_1 e^{jt} + j\alpha_2 e^{j^2 t} + j^2\alpha_3 e^{-jt} + j\alpha_4 e^{-j^2 t} \\ \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} - \alpha_3 e^{-jt} - \alpha_4 e^{-j^2 t} \end{pmatrix}$$

4) Soit y une fonction quatre fois dérivables sur I. Posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$.

$$y^{(4)} + y'' + y = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y' = y' \\ y'' = y'' \\ y^{(3)} = y^{(3)} \\ y^{(4)} = -y - y'' \end{array}\right. \Leftrightarrow Y' = AY$$

$$\Leftrightarrow \exists(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{C}^4/\ \forall t \in I,\ Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} + \alpha_3 e^{-jt} + \alpha_4 e^{-j^2 t} \\ j\alpha_1 e^{jt} + j^2\alpha_2 e^{j^2 t} - j\alpha_3 e^{-jt} - j^2\alpha_4 e^{-j^2 t} \\ j^2\alpha_1 e^{jt} + j\alpha_2 e^{j^2 t} + j^2\alpha_3 e^{-jt} + j\alpha_4 e^{-j^2 t} \\ \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} - \alpha_3 e^{-jt} - \alpha_4 e^{-j^2 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{C}^4/\ \forall t \in I,\ y(t) = \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} + \alpha_3 e^{-jt} + \alpha_4 e^{-j^2 t}.$$

Les solutions de (2) sur I sont les fonctions de la forme $t \mapsto \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} + \alpha_3 e^{-jt} + \alpha_4 e^{-j^2 t}$, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{C}^4$.

Soient $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{C}^4$ puis $y\ :\ t \mapsto \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} + \alpha_3 e^{-jt} + \alpha_4 e^{-j^2 t}$.

$$\begin{aligned} y \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} + \alpha_3 e^{-jt} + \alpha_4 e^{-j^2 t} = \overline{\alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} + \alpha_3 e^{-jt} + \alpha_4 e^{-j^2 t}} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \alpha_1 e^{jt} + \alpha_2 e^{j^2 t} + \alpha_3 e^{-jt} + \alpha_4 e^{-j^2 t} = \overline{\alpha_1} e^{j^2 t} + \overline{\alpha_2} e^{jt} + \overline{\alpha_3} e^{-j^2 t} + \overline{\alpha_4} e^{-jt} \\ &\Leftrightarrow \alpha_2 = \overline{\alpha_1} \text{ et } \alpha_4 = \overline{\alpha_3} \end{aligned}$$

car il est connu que la famille de fonctions $(t \mapsto e^{at})_{a\in\mathbb{C}}$ est libre.

Ainsi, les solutions de (2) à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto 2\mathrm{Re}\left(\alpha_1 e^{jt} + \alpha_3 e^{-jt}\right)$, $(\alpha_1,\alpha_3) \in \mathbb{C}^2$.

Maintenant, en posant $\alpha_1 = \dfrac{a+ib}{2}$ et $\alpha_3 = \dfrac{c+id}{2}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, de sorte que (α_1,α_3) décrit $\mathbb{C}^2$ si et seulement si (a,b,c,d) décrit $\mathbb{R}^4$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\left(\alpha_1 e^{jt} + \alpha_3 e^{-jt}\right) &= \mathrm{Re}\left((a+ib)e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + (c+id)e^{t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right) \\ &= \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-t/2} + \left(c\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + d\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{t/2} \end{aligned}$$

Les solutions de (2) sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

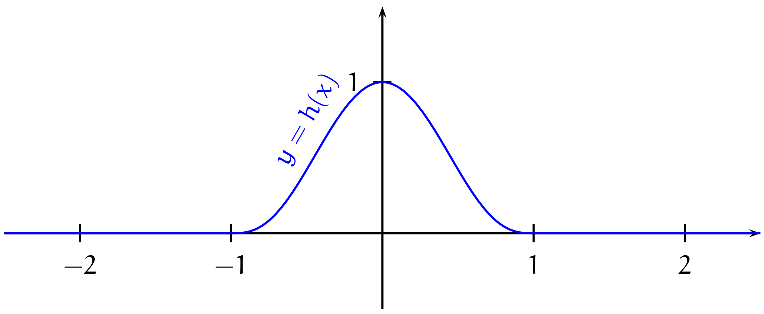
$$t \mapsto \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-t/2} + \left(c\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + d\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{t/2},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

B. Un lemme de du Bois-Reymond

5) La fonction h est de classe C^2 sur $]-\infty,-1[$, sur $[-1,1]$ et sur $]1,+\infty[$ en vertu de théorèmes généraux. De plus, h est paire.
• $h(1-1)=0=h(1)$ et donc h est continue en 1 puis en -1 par parité.
• h est de classe C^∞ sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ et les dérivées successives de h sur ces intervalles sont nulles. En particulier, $h'_d(1)=h''_d(1)=h^{(3)}(1)=0$.
• Le polynôme $(1-X^2)^3$ admet 1 pour racine triple et donc $((1-X^2)^3)'$ et $((1-X^2)^3)''$ admettent 1 pour racine double et simple respectivement. On en déduit que $h'_d(1)=0=h'_g(1)$ et $h''_d(1)=0=h''_g(1)$. Donc h est deux fois dérivable en 1 puis en -1 par parité. Enfin, $h''(1^+)=0=h''(1)$ et donc h'' est continue en 1 puis en -1 par parité.

$$\boxed{h\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

Puisque 1 est racine triple de $(1-X^2)^3$, 1 n'est pas racine de $((1-X^2)^3)^{(3)}$ et donc $h_g^{(3)}(1)\neq 0=h_d^{(3)}(1)$. Donc h n'est pas de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.



6) La fonction affine qui envoie $[x_0,x_1]$ sur $[0,1]$ est $a\ :\ x\mapsto \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$. a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La fonction $g=h\circ a$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $]x_0,x_1[$ car h est strictement positive sur $]0,1[$ et nulle sur $\mathbb{R}\setminus]x_0,x_1[$ car h est nulle sur $\mathbb{R}\setminus]0,1[$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=h\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right).}$$

7) Supposons que $F\neq 0$. Il existe un réel $a\in[0,1]$ tel que $F(a)\neq 0$. Quite à remplacer F par $-F$, on peut supposer que $F(a)>0$. Par continuité de F en a, il existe un intervalle $[x_0,x_1]$ contenant a avec $0\leqslant x_0<x_1\leqslant 1$ tel que $\forall x\in[x_0,x_1]$, $F(x)\geqslant\dfrac{F(a)}{2}$. La fonction g étant la fonction définie à la question précédente, on a $g_{/[0,1]}\in E^2_{0,0}$ et

$$\int_0^1 F(x)g(x)\ dx=\int_{x_0}^{x_1}F(x)g(x)\ dx\geqslant\frac{F(a)}{2}\int_{x_0}^{x_1}g(x)\ dx>0 \text{ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle).}$$

Donc, si $F\neq 0$, il existe $u\in E^2_{0,0}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\ dx\neq 0$. Par contraposition, si pour tout $u\in E^2_{0,0}$ on a $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\ dx=0$, alors $F=0$.

C. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

8) Posons $P=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_nX^n$ et $Q=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_nX^n$ où les b_n et les c_n sont sûrement nuls à partir d'un certain rang $r+1$.

$$\begin{aligned}
J(f_0+tu)&=\int_0^1 [P(f_0(x)+tu(x))+Q(f_0'(x)+tu'(x))]\ dx\\
&=\sum_{n=0}^r b_n\int_0^1(f_0(x)+tu(x))^n\ dx+\sum_{k=0}^r c_n\int_0^1(f_0'(x)+tu'(x))^n\ dx\\
&=\sum_{n=0}^r b_n\int_0^1\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(f_0(x))^{n-k}(u(x))^kt^k\right)\ dx+\sum_{n=0}^r c_n\int_0^1\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(f_0'(x))^{n-k}(u'(x))^kt^k\right)\ dx\\
&=\sum_{k=0}^r\left(\sum_{n=k}^r b_n\binom{n}{k}\int_0^1(f_0(x))^{n-k}(u(x))^k\ dx\right)t^k+\sum_{k=0}^r\left(\sum_{n=k}^r c_n\binom{n}{k}\int_0^1(f_0'(x))^{n-k}(u'(x))^k\ dx\right)t^k,
\end{aligned}$$

ce qui montre déjà que $q(t)$ est un polynôme en t. De plus, le coefficient a_1 de t dans ce polynôme est

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{n=1}^{r} b_n \binom{n}{1} \int_0^1 (f_0(x))^{n-1} u(x)\ dx + \sum_{n=1}^{r} c_n \binom{n}{1} \int_0^1 (f_0'(x))^{n-1} u'(x)\ dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{r} n b_n (f_0(x))^{n-1} \right) u(x)\ dx + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{r} n c_n (f_0'(x))^{n-1} \right) u'(x)\ dx \\
&= \int_0^1 (P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x))\ dx.
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_1 = \int_0^1 (P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x))\ dx.}$$

9) Puisque $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $f_0 + tu \in E$ (car $(f_0 + tu)(0) = f_0(0) = a$ et $(f_0 + tu)(1) = f_0(1) = b$), la fonction q admet un minimum en 0 et étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement $a_1 = q'(0) = 0$.

Ainsi, $\forall u \in E^2_{0,0}$, $\displaystyle\int_0^1 (P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x))\ dx = 0 \quad (*)$. Soit $u \in E^2_{0,0}$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 Q'(f_0'(x))u'(x)\ dx &= [Q'(f_0'(x))u(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx}[Q'(f_0'(x))]\, u(x)\ dx \\
&= -\int_0^1 \frac{d}{dx}[Q'(f_0'(x))]\, u(x)\ dx \text{ (car } u(0) = u(1) = 0.
\end{aligned}$$

Par suite, les égalités $(*)$ s'écrivent encore : $\forall u \in E^2_{0,0}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx}[Q'(f_0'(x))] \right) u(x)\ dx = 0$. Puisque la fonction $x \mapsto P'(f_0(x)) - \dfrac{d}{dx}[Q'(f_0'(x))]$ est continue sur $[0, 1]$, la question 7) permet d'affirmer que

$$\forall x \in [0, 1],\ P'(f_0(x)) - \frac{d}{dx}[Q'(f_0'(x))] = 0.$$

Ainsi, si la fonction J admet un minimum en un certain f_0 de E alors $\forall x \in [0, 1]$, $P'(f_0(x)) = \dfrac{d}{dx}[Q'(f_0'(x))]$.

Exemples

Premier exemple. Ici, on prend $P = 0$ et $Q = X^2$.

10) L'équation (Δ) s'écrit $\forall x \in [0, 1]$, $0 = \dfrac{d}{dx}[2f_0'(x)] = 2f_0''(x)$ ou encore $\forall x \in [0, 1]$, $f_0''(x) = 0$. f_0 est donc une fonction affine. De plus, la condition $f_0 \in E^2_{0,1}$ impose : $\forall x \in [0, 1]$, $f_0(x) = x$.

11) En résumé, si la fonction J_1 admet un minimum en un certain f_0 de E, alors nécessairement : $\forall x \in [0, 1]$, $f_0(x) = x$ et le minimum de J_1 est $\displaystyle\int_0^1 1^2\ dx = 1$.

Réciproquement, soit $f \in E^2_{0,1}$.

$$\begin{aligned}
J_1(f) &= \int_0^1 (f'(x))^2\ dx = \left(\int_0^1 1^2\ dx \right) \left(\int_0^1 (f'(x))^2\ dx \right) \\
&\geqslant \left| \int_0^1 1 \times f'(x)\ dx \right| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= |f(1) - f(0)| = 1.
\end{aligned}$$

De plus, l'égalité est effectivement obtenue quand $f = f_0 \in E$ et f_0 est l'unique élément de E réalisant ce minimum (d'après le début de la question).

$$\boxed{\begin{array}{c} \textbf{1) } \underset{E}{\mathrm{Min}} J_1 = 1. \\ \textbf{2) } \forall f \in E,\ J_1(f) = 1 \Leftrightarrow f = f_0 \text{ où } \forall x \in [0, 1],\ f_0(x) = x. \end{array}}$$

Deuxième exemple. Ici, on prend $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$.

12) L'équation (Δ) s'écrit $\forall x \in [0,1]$, $0 = \dfrac{d}{dx}\left[2f_0'(x) + 3(f_0'(x))^2\right] = 2f_0''(x) + 6f_0'(x)f_0''(x)$ ou encore

$$\forall x \in [0,1],\ f_0''(x)(1 + 3f_0'(x)) = 0 \quad (*).$$

Supposons qu'il existe un réel x de $[0,1]$ tel que $f_0''(x) \neq 0$. Par continuité de f'' sur $[0,1]$, il existe un intervalle $[x_0, x_1]$ de longueur non nulle et contenu dans $[0,1]$ tel que $\forall x \in [x_0, x_1]$, $f''(x) \neq 0$. L'égalité $(*)$ impose alors $\forall x \in [x_0, x_1]$, $f_0'(x) = -\dfrac{1}{3}$. Mais alors, $\forall x \in [x_0, x_1]$, $f_0''(x) = 0$ ce qui est une contradiction.

Donc $\forall x \in [0,1]$, $f_0''(x) = 0$ et encore une fois, f_0 est affine. Les conditions $f_0(0) = f_1(0) = 0$ impose alors $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x) = 0$.

13) Ainsi, si J_2 admet un minimum sur E alors ce minimum est atteint en $f_0 = 0$ et est égal à $J_2(0) = 0$.

Pour $x \in [0,1]$, posons $f(x) = x^2(1-x)$. f est effectivement dans $E^2_{0,0}$. De plus,

$$\begin{aligned}
J_2(f) &= \int_0^1 \left((2x-3x^2)^2 + (2x-3x^2)^3\right)\ dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x^3 - 27x^4 + 54x^5 - 27x^6)\ dx = \frac{4}{3} - 1 - \frac{27}{5} + 9 - \frac{27}{7} \\
&= 8 + \frac{35 - 567 - 405}{105} = \frac{840 - 937}{105} = -\frac{97}{205} \\
&< 0 = J_2(0).
\end{aligned}$$

Donc $J_2(0)$ n'est pas le minimum de J_2 sur E et finalement

$$\boxed{J_2 \text{ n'admet pas de minimum sur } E.}$$

D. Un exemple avec dérivée seconde

14) Les fonction f et f'' sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et de carrés intégrables sur $\mathbb{R}^+$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et de plus,

$$\int_0^{+\infty} |f(x)f''(x)|\ dx \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x))^2\ dx} \times \sqrt{\int_0^{+\infty} (f''(x))^2\ dx}.$$

En particulier, $\displaystyle\int_0^x f(t)f''(t)\ dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

Supposons que $f(x)f'(x)$ tende vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Il existe $a \geqslant 0$ tel que $\forall x \geqslant a$, $f(x)f'(x) \geqslant 1$. Par intégration on obtient pour $x \geqslant a$,

$$x - a = \int_a^x dt \leqslant \int_a^x f'(t)f(t)\ dt = \frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(a)),$$

ou encore $\forall x \geqslant a$, $f^2(x) \geqslant 2(x-a) + f^2(a)$. En particulier $\lim\limits_{x \to +\infty} f^2(x) = +\infty$ ce qui contredit l'intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}^+$. Donc, $f(x)f'(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

15) Soit $x \geqslant 0$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^x f(t)f''(t)\ dt = [f(t)f'(t)]_0^x - \int_0^x (f'(t))^2\ dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x (f'(t))^2\ dt.$$

Supposons que f'^2 ne soit pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x (f'(t))^2\ dt = +\infty$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)f''(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\ dt \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\displaystyle\int_0^x (f'(t))^2\ dt + \int_0^x f(t)f''(t)\ dt + f(0)f'(0)\right) = +\infty$ ce qui n'est pas. Donc f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Donc, f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puis $f(x)f'(x) = \displaystyle\int_0^x (f'(t))^2\ dt + \int_0^x f(t)f''(t)\ dt + f(0)f'(0)$ a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$.
D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, $\dfrac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) = \displaystyle\int_0^x f(t)f'(t) \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_0^x \ell\ dt = \ell x$ puis $f^2(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2\ell x$. Ceci montre que $\ell > 0$ puis que $\lim\limits_{x \to +\infty} f^2(x) = +\infty$ contredisant l'intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\ell = 0$ ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)f'(x) = 0$.

16) D'après la question 4), les solutions de (2) sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$f\ :\ t \mapsto \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-t/2} + \left(c\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + d\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{t/2},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

Pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)^2 e^{-t} + 2\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\left(c\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + d\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \\ &\quad + \left(c\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + d\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)^2 e^t. \end{aligned}$$

• Si $(c,d) = (0,0)$, la fonction $t \mapsto f^2(t) = \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)^2 e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$. Dans ce cas, $f \in L^2$.

• Si $(c,d) \neq (0,0)$, pour tout réel positif t, $f^2(t) \geqslant -2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} + (c^2+d^2)\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \alpha\right)e^t$ où α est le réel de $[0,2\pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f^2(t)\ dt &\geqslant \int_0^{+\infty} \left(-2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} + (c^2+d^2)\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \alpha\right)e^t\right)\ dt \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}(-\frac{\pi}{4}+2n\pi+\alpha)}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{4}+2n\pi+\alpha)} \left(-2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} + (c^2+d^2)\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \alpha\right)e^t\right)\ dt \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(-2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} + \frac{c^2+d^2}{2}e^{\frac{2}{\sqrt{3}}(-\frac{\pi}{4}+2n\pi+\alpha)}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $f \notin L^2$.

En résumé, $f \in L^2 \Leftrightarrow c = d = 0$. Il reste $\forall t \geqslant 0$, $f(t) = \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-t/2}$. f ainsi définie est bien de classe C^4 sur $\mathbb{R}^+$. Ensuite, d'après la formule de Leibniz, il existe deux réels α et β tels que $\forall t \geqslant 0$, $f''(t) = \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-t/2}$ de sorte que $f'' \in L^2$.

Les solutions de (2) éléments de E sont les fonctions de la forme $t \mapsto \left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-t/2}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

17) L'équation caractéristique de l'équation $y''+y'+y=0$, à savoir $z^2+z+1=0$, admet pour solutions $z_1 = j = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation $y''+y'+y=0$ sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto e^{-t/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ ou encore l'ensemble des solutions de $y''+y'+y=0$ sur $\mathbb{R}^+$ est $\text{Vect}(e_1,e_2)$.

D'après la question 16), si J présente un minimum en un élément f de E, nécessairement $f \in \text{Vect}(e_1,e_2)$ ou encore f est solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation $y''+y'+y=0$.

Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\sqrt{3}\alpha\beta + 3\beta^2) = \frac{\left(\alpha+\beta\sqrt{3}\right)^2}{4}.$$

Cette expression est supérieure ou égale à 0 avec égalité si et seulement si $\alpha+\beta\sqrt{3}=0$ ou encore $\alpha=-\sqrt{3}\beta$. En résumé, si J admet un minimum en un certain f de E, nécessairement il existe un réel β tel que pour tout $t\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
f(t)&=\beta e^{-t/2}\left(-\sqrt{3}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right)=-2\beta e^{-t/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right)\\
&=\lambda e^{-t/2}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

où $\lambda=-2\beta$. Finalement, si f admet un minimum en un certain f de E, nécessairement il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f=\lambda\psi$ et ce minimum est égal à 0 car $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $J(\lambda\psi)=0$.

18) Soit $A>0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A\left[(f(x))^2-(f'(x))^2+(f''(x))^2\right]dx&=\int_0^A\Big((f(x)+f'(x)+f''(x))^2-2(f'(x))^2-2f(x)f'(x)-2f(x)f''(x)-2f'(x)f''(x)\Big)\,dx\\
&=\int_0^A(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx-2\int_0^A\left((f'(x))^2+f(x)f''(x)\right)dx-2\int_0^A f(x)f'(x)\,dx\\
&-2\int_0^A f'(x)f''(x)\,dx\\
&=\int_0^A(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx-2\left[f(x)f'(x)+\frac{1}{2}(f(x))^2+\frac{1}{2}(f'(x))^2\right]_0^A\\
&=\int_0^A(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx-\left[(f(x)+f'(x))^2\right]_0^A\\
&=\int_0^A(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx+(f(0)+f'(0))^2-(f(A)+f'(A))^2.
\end{aligned}$$

D'après la question 15), $f'\in L^2$ (de même que f et f'') Donc la fonction $f^2--f'^2+f''^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^+$. D'autre part, la fonction $f+f'+f''$ est dans L^2 car il est connu que L^2 est un espace vectoriel.
Mais alors $\int_0^A\left[(f(x))^2-(f'(x))^2+(f''(x))^2\right]dx$ et $\int_0^A(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx$ ont une limite réelle quand A tend vers $+\infty$. Il en est de même de $(f(A)+f'(A))^2$. Mais comme la fonction $(f+f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Cette limite ne peut être que 0. Donc $\lim\limits_{A\to+\infty}(f(A)+f'(A))^2=0$. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left[(f(x))^2-(f'(x))^2+(f''(x))^2\right]dx=\int_0^{+\infty}(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx+(f(0)+f'(0))^2.$$

Mais alors, pour tout $f\in E$, $J(f)\geqslant 0=J(\lambda\psi)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, et donc J admet effectivement un minimum égal à 0 atteint en chaque $\lambda\psi$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

19) D'après la question précédente, pour tout f de E,

$$J(f)=\int_0^{+\infty}(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx+(f(0)+f'(0))^2\geqslant 0,$$

et de plus

$$\begin{aligned}
J(f)=0&\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx+(f(0)+f'(0))^2=0\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}(f(x)+f'(x)+f''(x))^2dx=(f(0)+f'(0))^2=0\\
&\Leftrightarrow\forall x\geqslant 0,\ f(x)+f'(x)+f''(x)=0\text{ et }f(0)+f'(0)=0\text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\
&\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/\ f=\alpha e_1+\beta e_2\text{ et }f'(0)=-f(0)\\
&\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/\ f=\alpha e_1+\beta e_2\text{ et }-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta\sqrt{3}}{2}=-\alpha\text{ (car }e_1(0)=1,\ e_1'(0)=-\frac{1}{2},\ e_2(0)=0\text{ et }e_2'(0)=\frac{\sqrt{3}}{2})\\
&\Leftrightarrow\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2/\ f=\alpha e_1+\beta e_2\text{ et }\alpha=-\sqrt{3}\beta\\
&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ f=\lambda\psi.
\end{aligned}$$

E. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

20) Soit $f\in E$. Soit $\mu>0$. Tout d'abord, f_μ est de classe C^4 sur $\mathbb{R}^+$ puis

- $\int_0^{+\infty}(f_\mu(x))^2\,dx=\int_0^{+\infty}(f(\mu x))^2\,dx=\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}(f(t))^2\,dt<+\infty$,

• $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f_\mu''(x))^2\,dx=\mu^4\int_0^{+\infty}(f''(\mu x))^2\,dx=\mu^3\int_0^{+\infty}(f''(t))^2\,dt<+\infty$.

Donc $f_\mu\in E$ puis

$$\begin{aligned}J(f_\mu)&=\int_0^{+\infty}\left((f(\mu x))^2-\mu^2(f'(\mu x))^2+\mu^4(f''(\mu x))^2\right)dx=\frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty}\left((f(t))^2-\mu^2(f'(t))^2+\mu^4(f''(t))^2\right)dt\\&=\frac{1}{\mu}(\|f\|^2-\mu^2\|f'\|^2+\mu^4\|\|f''\|^2)\end{aligned}$$

Pour tout $\mu>0$, on a $J(f_\mu)\geqslant 0$ et donc pour tout $\mu>0$, on a $\mu^4\|f''\|^2-\mu^2\|f'\|^2+\|\|f\|^2\geqslant 0$ ou encore pour tout $x>0$, $x^2\|f''\|^2-x\|f'\|^2+\|\|f\|^2\geqslant 0$.
Comme d'autre part, cette inégalité est claire quand $x\leqslant 0$, on a finalement

$$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\|f''\|^2-x\|f'\|^2+\|\|f\|^2\geqslant 0.$$

Si $\|f''\|^2=0$ alors $f''=0$ puis f est affine. Mais la fonction nulle est la seule fonction affine de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donc $f=0$. Dans ce cas, l'inégalité à établir est immédiate.
Sinon, le trinôme du second degré $x\mapsto x^2\|f''\|^2-x\|f'\|^2+\|\|f\|^2$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et donc son discriminant est négatif ou nul. Ceci fournit $\|f'\|^4-4\|f\|^2\|f''\|^2\leqslant 0$ puis $\|f'\|^2\leqslant\|f\|\,\|f''\|$. On a montré que

$$\boxed{\forall f\in E,\ \|f'\|^2\leqslant\|f\|\,\|f''\|.}$$

21) D'après la question précédente, on a l'égalité si et seulement si $f=0$ ou bien $f\neq 0$ et dans ce cas, il existe $x\in\mathbb{R}$ (nécessairement strictement positif) tel que $x^2\|f''\|^2-x\|f'\|^2+\|\|f\|^2=0$.
Donc, on a l'égalité si et seulement si $f=0$ ou bien $\exists\mu>0/\ J(f_\mu)=0$.
Ceci équivaut à ou bien $f=0$, ou bien $\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\geqslant 0,\ f(\mu t)=\lambda e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(t\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ et finalement

$$\boxed{\forall f\in E,\ \|f'\|^2=\|f\|\,\|f''\|\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists\mu>0/\ \forall x\geqslant 0,\ f(x)=\lambda e^{-\frac{x}{2\mu}}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2\mu}-\frac{\pi}{3}\right).}$$

