SESSION 2011

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE EPREUVE. FILIÈRE MP

A. Décomposition de Dunford

1) Le polynôme $P = (-1)^n \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{r} P_i$ est annulateur de f d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON et les polynômes P_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont deux à deux premiers entre eux. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i.$$

$$\boxed{\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i.}$$

2) Soit $i \in [\![1, r]\!]$. On sait que $F_i = \mathrm{Ker}(P_i(f))$ est stable par f et donc f_i est un endomorphisme de f_i. D'autre part, puisque λ_i est valeur propre de f, $(f - \lambda_i \mathrm{Id})_i^{\alpha}$ n'est pas inversible et donc $F_i \neq \{0\}$.

Par définition de F_i, $(f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})^{\alpha_i} = 0$ ou encore le polynôme $P_i = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ est annulateur de f_i. Ceci montre que λ_i est l'unique valeur propre de f_i et donc que le polynôme caractéristique de f_i est de la forme $(\lambda_i - X)^{\beta_i}$.

Soit alors $\mathscr{B}' = \bigcup_{i=1}^{r} \mathscr{B}_i$ une base adaptee à la décomposition $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. Puisque chaque F_i est stable par f, la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$ est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal A_i étant la matrice de f_i dans la base $\mathscr{B}_i$.

Un calcul de déterminant par blocs montre alors que $P = \prod_{i=1}^{r} \det(f_i - X\mathrm{Id}_{F_i}) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{\beta_i}$.

En résumé, $P = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{\beta_i}$. L'unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non constant impose $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i = \beta_i$ et donc le polynôme caractéristique de f_i est $(\lambda_i - X)^{\alpha_i} = P_i$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, r]\!], \text{ le polynôme caractéristique de } f_i \text{ est } P_i.}$$

3) Ceci montre aussi que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\dim(F_i) = \alpha_i$ puisque le degré de P_i est la dimension de F_i.

Avec les notations de la question précédente, la matrice $A_i - \lambda_i I_{\alpha_i}$ est la matrice de $f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$ dans $\mathscr{B}_i$ et donc $(A_i - \lambda_i I_{\alpha_i})^{\alpha_i} = 0$. Par suite, la matrice $N_i = A_i - \lambda_i I_{\alpha_i}$ est nilpotente (puisque $\alpha_i \neq 0$) d'indice inférieur ou égal à α_i. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathscr{B}'$. La matrice $A' = P^{-1}AP$ est la matrice de f dans $\mathscr{B}'$ et est de la forme désirée.

4) Soient $D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix}$ puis $D = PD'P^{-1}$, $N' = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & N_r \end{pmatrix}$ puis $N = PN'P^{-1}$.

La matrice D' est diagonale et donc la matrice D est diagonalisable. D'autre part, un calcul par blocs montre que la matrice N' est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $\alpha = \mathrm{Max}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ et il en est de même de N (car $N^{\alpha} = PN'^{\alpha}P^{-1} = 0$.

Ensuite, $A' = D' + N'$ et donc $A = PA'P^{-1} = PD'P^{-1} + PN'P^{-1} = D + N$. Enfin, un calcul par blocs montre que les matrices N' et D' commutent car chaque N_i commute avec la matrice scalaire $\lambda_i N_{\alpha_i}$ correspondante et donc N et D commutent (car $ND = PN'P^{-1}PD'P^{-1} = PN'D'P^{-1} = PD'N'P^{-1} = DN$).

5) • Le polynôme caractéristique de A est

$$P = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (3-X)(X^2-2X+1) - 2(X-1) + (X-1) = (3-X)(1-X)^2 + (1-X)$$
$$= (1-X)(X^2 - 4X + 3 + 1) = (1-X)(2-X)^2.$$

f admet donc 1 pour valeur propre simple et 2 pour valeur propre double. On a donc déjà $D' = \mathrm{diag}(1,2,2)$.

• Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - y = -z \\ -x + y = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array}\right. .$$

Donc $F_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = (0,1,1)$.

De même, puisque $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})^2$ est le plan vectoriel d'équation $-x + y = 0$. Une base de F_2 est (e_2, e_3) où $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

• $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^3 = F_1 \oplus F_2$. La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ car

$$\left\{\begin{array}{l} e_3 = k \\ e_2 = i + j \\ e_1 = j + k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = e_3 \\ j = e_1 - e_3 \\ i = -e_1 + e_2 + e_3 \end{array}\right. .$$

Donc

$$\begin{aligned} D = PD'P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, $N = A - D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

B. Commutation et conjugaison

6) Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$.

$$\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P(X) = P^{-1}(APXP^{-1} - PXP^{-1}A)P = (P^{-1}AP)X - X(P^{-1}AP) = \mathrm{comm}_{P^{-1}AP}(X).$$

$$\boxed{\forall P \in GL_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{P^{-1}AP} = \mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{P^{-1}}(A)}.}$$

7) On note tout d'abord que pour tout $B \in M_n(\mathbb{C})$, comm_B est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
Posons $A = \mathrm{diag}(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} - E_{i,j}A &= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}\right) E_{i,j} - E_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{k,i} E_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{k,j} E_{i,k} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}. \end{aligned}$$

Puisque $E_{i,j} \neq 0$, $E_{i,j}$ est un vecteur propre de comm_A associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$.

Ainsi $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de comm_A et l'endomorphisme comm_A est diagonalisable. Au passage, on a trouvé toutes les valeurs propres de comm_A : ce sont les n^2 nombres $\lambda_i - \lambda_j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

8) Si A est diagonale, comm_A est diagonalisable d'après la question précédente.
Supposons maintenant que A soit diagonalisable. Il existe une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale. D'après ci-dessus, $\mathrm{comm}_{P^{-1}AP}$ est diagonalisable.

D'après la question 6), $\mathrm{comm}_{P^{-1}AP} = \mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = (\mathrm{conj}_P)^{-1} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$ et donc

$$\mathrm{comm}_A = \mathrm{conj}_P \circ \mathrm{comm}_{P^{-1}AP} \circ (\mathrm{conj}_P)^{-1}.$$

Puisque $\mathrm{comm}_{P^{-1}AP}$ est diagonalisable, on sait qu'il en est de même de comm_A (si $(F_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de vecteurs propres de $P^{-1}AP$, alors $(\mathrm{conj}_P(F_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (PF_{i,j}P^{-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de vecteurs propres de comm_A.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, } \mathrm{comm}_A \text{ est diagonalisable.}}$$

9) Soit φ_A (resp. ψ_A) l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ qui à $X \in M_n(\mathbb{C})$ associe AX (resp. XA). On a $\mathrm{comm}_A = \varphi_A - \psi_A$ et puisque φ_A et ψ_A commutent (car $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$, $\varphi_A(\psi_A(X)) = AXA = \psi_A(\varphi_A(X))$), la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ (\mathrm{comm}_A)^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (\varphi_A^{p-k})(\psi_A)^k,$$

ou encore

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall X \in M_n(\mathbb{C}),\ (\mathrm{comm}_A)^p(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} A^{p-k}XA^k.$$

Supposons maintenant A nilpotente. On note $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de A. Alors, pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{comm}_A)^{2p-1}(X) &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} A^{2p-1-k}XA^k + \sum_{k=p}^{2p-1} (-1)^k \binom{2p-1}{k} A^{2p-1-k}XA^k \ (p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2p-1 \geqslant p)\\ &= 0 + 0 \text{ (si } k \geqslant p,\ A^k = 0 \text{ et si } k \leqslant p-1,\ 2p-1-k \geqslant 2p-1-(p-1) = p)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par suite, $(\mathrm{comm}_A)^{2p-1} = 0$ et donc comm_A est nilpotent d'indice inférieur ou égal à $2p-1$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, } \mathrm{comm}_A \text{ est nilpotent.}}$$

10) Supposons que $\mathrm{comm}_A = 0$. Alors, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = 0$. Or, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{comm}_A(E_{i,j}) &= AE_{i,j} - E_{i,j}A = \left(\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}\right) E_{i,j} - E_{i,j}\left(\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{k,l}E_{k,l}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & a_{i-1,i} & 0 & \dots & 0\\ -a_{j,1} & \dots & -a_{j,j-1} & a_{i,i} - a_{j,j} & -a_{j,j+1} & \dots & -a_{j,n}\\ 0 & \dots & 0 & a_{i+1,i} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Par suite, $\forall i \neq j$, $a_{i,j} = 0$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$ ce qui montre que A est nécessairement une matrice scalaire. Si de plus, A est nilpotente alors nécessairement $A = 0$.

En résumé, si A est nilpotente et si $\mathrm{comm}_A = 0$ alors $A = 0$.

11) Posons $A = D + N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente. Alors $\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_D + \mathrm{comm}_N$. De plus, comm_D est diagonalisable d'après la question 8) et comm_N est nilpotent d'après la question 9). Par unicité de la décomposition de Dunford, on a $d = \mathrm{comm}_D$ et $n = \mathrm{comm}_N$.

On sait déjà que si A est diagonalisable, alors comm_A est diagonalisable. Réciproquement, supposons que comm_A soit diagonalisable. On a donc

$$d + n = \mathrm{comm}_A + 0.$$

Comme 0 est nilpotent et comm_A est diagonalisable, on a $\mathrm{comm}_N = n = 0$ par unicité de la décomposition de Dunford. Mais alors $N = 0$ d'après la question 10) puis $A = D$ est diagonalisable. On a montré que

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ A \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \mathrm{comm}_A \text{ diagonalisable.}}$$

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

12) (i) $\Rightarrow$ (ii) On a toujours $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ car pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Ker}(u) \Rightarrow u(x) = 0 \Rightarrow u^2(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(u^2).$$

Supposons de plus que u soit diagonalisable. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de u et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres associée. On sait alors que la famille des valeurs propres de u^2 est $(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$ et de plus,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u^2(e_i) = \lambda_i^2 e_i,$$

de sorte que $(e_1, \ldots, e_n)$ est aussi une base de vecteurs propres de u^2. Par suite, u^2 est diagonalisable. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(u))$ (resp. $\dim(\mathrm{Ker}(u^2))$) est égal à l'ordre de multiplicité de 0 en tant que valeur propre de u (resp. u^2). Comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$, 0 a même ordre de multiplicité en tant que valeur propre de u et valeur propre de u^2. Par suite, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u^2)) < +\infty$ puis en tenant compte de $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$, on a finalement $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.

$$\boxed{\forall u \in L(E),\ u \text{ diagonalisable} \Rightarrow \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2).}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
Alors $u(x) = 0$ et $\exists y \in E/\ x = u(y)$. On en déduit que $u^2(y) = u(x) = 0$ et donc que $y \in \mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$ puis que $x = u(y) = 0$. Finalement, $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

$$\boxed{\forall u \in L(E),\ \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \Rightarrow \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}.}$$

13) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i = 0 &\Rightarrow \forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i b(\varepsilon_i, x) = 0\\ &\Rightarrow b\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i, x\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i = 0 \text{ (car } b \text{ est non dégénérée)}\\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1, q]\!],\ \lambda_i = 0 \text{ (car } (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant q} \text{ est libre.)}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(\varphi_1, \ldots, \varphi_q) \text{ est une famille libre de } E^*.}$$

14) Soit $x \in E$. Posons $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$. On a donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = \varphi_i(x)$.

$$\begin{aligned}x \in F^{\perp_b} &\Leftrightarrow \forall y \in F,\ b(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q,\ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i b(x, \varepsilon_i) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q,\ \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, q]\!],\ \varphi_i(x) = 0 \text{ (pour } \Rightarrow\text{, on applique à chaque } q\text{-uplet } (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0))\\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, q]\!],\ x_i = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(e_{q+1}, \ldots, e_p).\end{aligned}$$

Donc $F^{\perp_b} = \mathrm{Vect}(e_{q+1}, \ldots, e_p)$. En particulier, $\dim(F) + \dim(F^{\perp_b}) = q + p - q = p$.

$$\boxed{\dim(F) + \dim(F^{\perp_b}) = p.}$$

D. Critère de Klarès

15) φ est bilinéaire par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la trace.
φ est symétrique car on sait que $\forall (X, Y) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$, $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$. En effet, en posant $X = (x_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $Y = (y_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$,

$$\mathrm{tr}(XY) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} y_{j,i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} y_{i,j} x_{j,i}\right) = \mathrm{tr}(YX).$$

On note au passage que $\varphi(XY) = \text{tr}(XY) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_{i,j}y_{j,i}$.

Soit alors $X \in M_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}X \in M_n(\mathbb{C})^{\perp_\varphi} &\Rightarrow \forall Y \in M_n(\mathbb{C})\ \text{tr}(XY) = 0 \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \text{tr}(XE_{i,j}) = 0 \\ &\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} x_{k,l}\delta_{i,l}\delta_{j,k} = 0 \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ x_{j,i} = 0 \\ &\Rightarrow X = 0.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.}}$$

16) Soit $Y \in \text{Im}(\text{comm}_A)$. Il existe $Z \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $Y = AZ - ZA$.

Soit alors $X \in \text{Ker}(\text{comm}_A$. Par définition, $AX = XA$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y) = \text{tr}(XY) &= \text{tr}(X(AZ - ZA)) = \text{tr}(XAZ) - \text{tr}(XZA) \\ &= \text{tr}(ZXA) - \text{tr}(ZAX) \text{ (propriété de la trace)} \\ &= \text{tr}(ZAX) - \text{tr}(ZAX) \text{ (car } AX = XA) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Im}(\text{comm}_A) \subset (\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp_\varphi}$. Maintenant, d'après la question 14) et le théorème du rang,

$$\dim\left((\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp_\varphi}\right) = n^2 - \dim(\text{Ker}(\text{comm}_A)) = \dim(\text{Im}(\text{comm}_A)) < +\infty$$

et donc

$$\boxed{(\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp_\varphi} = \text{Im}(\text{comm}_A).}$$

17) Notons $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de A.
Soit $X \in \text{Ker}(\text{comm}_A)$. Alors $AX = XA$ puis comme A et X commutent, $(AX)^p = A^pX^p = 0$. Par suite, la matrice AX est aussi nilpotente. Mais alors, la matrice AX admet 0 pour unique valeur propre et don en déduit que sa trace, qui est la somme de ses valeurs propres, est nulle. Ainsi, pour tout $X \in \text{Ker}(\text{comm}_A)$,

$$\varphi(A,X) = \text{tr}(AX) = 0,$$

et donc $A \in (\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp_\varphi} = \text{Im}(\text{comm}_A)$. On en déduit qu'il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{comm}_A(X) = A$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = (A + \lambda I_n)X - X(A + \lambda I_n) = AX - XA = \text{comm}_A(X) = A$.

18) On reprend les notations des questions 3) et 4). Pour $i \in [\![1,r]\!]$, la matrice N_i est nilpotente de format α_i. D'après la question 17), il existe une matrice $X'_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ tel que $\text{comm}_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(X'_i) = N_i$.

On définit alors les matrices X' et N', diagonales par blocs, par $X' = \begin{pmatrix} X'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X'_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X'_r \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_r \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs montre que $\text{comm}_{A'}(X') = N'$.

Puis avec la matrice P des questions 3) et 4),

$$\begin{aligned}N &= PN'P^{-1} = P\text{comm}_{A'}(X')P^{-1} = P(A'X' - X'A')P^{-1} = PA'P^{-1}PX'P^{-1} - PX'P^{-1}PA'P^{-1} = AX - XA \\ &= \text{comm}_A(X)\end{aligned}$$

où $X = PX'P^{-1}$. Donc, il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{comm}_A(X) = N$.

19) Supposons A diagonalisable. Alors, comm_A est diagonalisable d'après la question 8) puis $\text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}((\text{comm}_A)^2)$ d'après la question 12).

Supposons réciproquement que $\text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}((\text{comm}_A)^2)$. Alors $\text{Ker}(\text{comm}_A) \cap \text{Im}(\text{comm}_A) = \{0\}$, toujours d'après la question 12).
D'après la question 18), $N \in \text{Im}(\text{comm}_A)$. D'autre part, N commute avec D et donc N commute avec A car $AN = DN + N^2 = ND + N^2 = NA$. Par suite, $N \in \text{Ker}(\text{comm}_A)$. Finalement, $N \in \text{Ker}(\text{comm}_A) \cap \text{Im}(\text{comm}_A) = \{0\}$. Puisque $N = 0$, il reste $A = D$ ce qui signifie que A est diagonalisable.

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ A \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}((\text{comm}_A)^2).}$$

