SESSION 2010

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME EPREUVE. FILIÈRE PSI

I. Préliminaires

1 - • N est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
• Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) \geqslant 0$.
• Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$N(A) = 0 \Rightarrow \sup_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |A_{i,j}| = 0 \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |A_{i,j}| \leqslant 0 \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} = 0 \Rightarrow A = 0.$$

• Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda A) = \sup_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |\lambda A_{i,j}| = |\lambda| \sup_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |A_{i,j}| = |\lambda| N(A).$$

• Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$|(A+B)_{i,j}| \leqslant |A_{i,j}| + |B_{i,j}| \leqslant \sup_{k,l \in \{1,\dots,n\}} |\lambda A_{k,l}| + \sup_{k,l \in \{1,\dots,n\}} |\lambda B_{k,l}| = N(A) + N(B),$$

et donc $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$.

On a montré que

$$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2 - On sait que r est le rang de M.

3 - Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $J_k = \operatorname{diag}\left(\underbrace{1 \dots 1}_{r}\underbrace{1/(k+1) \dots 1/(k+1)}_{n-r}\right)$. Chaque J_k, $k \in \mathbb{N}$, est inversible car $0 \notin \mathrm{Sp}(J_k)$ et de plus, $\lim\limits_{k \to +\infty} J_k = \operatorname{diag}\left(\underbrace{1 \dots 1}_{r}\underbrace{0 \dots 0}_{n-r}\right) = J$. Ensuite l'application $A \mapsto PAQ$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que

$$M = PJQ = P\left(\lim_{k \to +\infty} J_k\right) Q = \lim_{k \to +\infty} (PJ_kQ).$$

On a montré qu'il existe une suite $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles telles que $M = \lim\limits_{k \to +\infty} PJ_kQ$.

4 - Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(M) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) M_{\sigma(1),1} \dots M_{\sigma(n),n}$.
Maintenant, chaque application $M \mapsto M_{i,j}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que forme linéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que chaque application $M \mapsto M_{\sigma(1),1} \dots M_{\sigma(n),n}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis que det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II. Formule de condensation

5 - Soit $i \in [\![1,n]\!]$. En développant $\det M$ suivant sa i-ème ligne on obtient

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i,j} M_{i,j} \det{[M]_i^j} = (-1)^{i+1}\left(M_{i,1}\det{[M]_i^1} - M_{i,2}\det{[M]_i^2} + \dots + (-1)^{n-1} M_{i,n}\det{[M]_i^n}\right),$$

et donc $M_{i,1}\det{[M]_i^1} - M_{i,2}\det{[M]_i^2} + \dots + (-1)^{n-1} M_{i,n}\det{[M]_i^n} = (-1)^{i+1}\det M$.

6 - Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Soit M' la matrice dont les lignes sont les lignes de M à l'exception de la i-ème ligne qui est la j-ème ligne de M. Puisque M' a deux lignes identiques son déterminant est nul. En développant $\det M'$ suivant sa i-ème ligne, on obtient

$$0 = \det M' = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} M'_{i,k} \det [M']_i^k = (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} M_{j,k} \det [M]_i^k,$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} M_{j,k} \det [M]_i^k = 0$.

7 - Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

• Si $i \neq j$, le coefficient ligne j, colonne i de $M \times {}^t(\text{com}\, M)$ est

$$\sum_{k=1}^{n} M_{j,k} \left({}^t\text{com}\, M\right)_{k,i} = (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} M_{j,k} \det [M]_i^k = 0 \text{ d'après 6 -}$$

• Si $i = j$, le coefficient ligne $j = i$, colonne i de $M \times {}^t(\text{com}\, M)$ est

$$\sum_{k=1}^{n} M_{i,k} \left({}^t\text{com}\, M\right)_{k,i} = (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} M_{i,k} \det [M]_i^k = \det M \text{ d'après 5 -}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \times {}^t(\text{com}\, M) = (\det M) I_n.}$$

8 - En développant $\det M^*$ suivant sa première ligne, on obtient

$$\begin{aligned}
\det M^* &= \det[M]_1^1 (1^{n-2} \det[M]_n^n) + (-1)^{n+1}((-1)^{n+1}\det[M]_n^1)(-1)^{n-1+1}(-1)^{n+1}\det[M]_1^n \\
&= \det[M]_1^1 \det[M]_n^n - \det[M]_n^1 \det[M]_1^n.
\end{aligned}$$

9 - D'après les formules des questions 5 et 6

$$\begin{aligned}
MM^* &= \begin{pmatrix}
M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & \dots & M_{1,n-1} & M_{1,n} \\
M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & \dots & M_{2,n-1} & M_{2,n} \\
M_{3,1} & M_{3,2} & \dots & \dots & M_{3,n-1} & M_{3,n} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & \dots & \dots & M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\
M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & \dots & M_{n,n-1} & M_{n,n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\det[M]_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+1}\det[M]_n^1 \\
-\det[M]_1^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]_n^2 \\
\det[M]_1^3 & 0 & 1 & \dots & 0 & (-1)^{n+3}\det[M]_n^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(-1)^n\det[M]_1^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\det[M]_n^{n-1} \\
(-1)^{n+1}\det[M]_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 & \det[M]_n^n
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\det M & M_{1,2} & \dots & \dots & M_{1,n-1} & 0 \\
0 & M_{2,2} & \dots & \dots & M_{2,n-1} & 0 \\
0 & M_{3,2} & \dots & \dots & M_{3,n-1} & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & M_{n-1,2} & \dots & \dots & M_{n-1,n-1} & 0 \\
0 & M_{n,2} & \dots & \dots & M_{n,n-1} & \det M
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

10 - En développant suivant la première colonne puis la dernière, on obtient $\det MM^* = (\det M)^2 \det[M]_{1,n}^{1,n}$. D'après la question 8, on en déduit que

$$(\det M)^2 \det[M]_{1,n}^{1,n} = \det M \det M^* = \det M(\det[M]_1^1 \det[M]_n^n - \det[M]_n^1 \det[M]_1^n)$$

et puisque $\det M \neq 0$, on obtient après simplification

$$\boxed{\det M \det[M]_{1,n}^{1,n} = \det[M]_1^1 \det[M]_n^n - \det[M]_n^1 \det[M]_1^n) \quad (1).}$$

11 - Si M n'est pas inversible, il existe une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles convergeant vers M. La formule précédente est valable pour chaque matrice M_k, $k \in \mathbb{N}$. Cette formule reste valable en passant à la limite quand k tend vers $+\infty$ par continuité du déterminant.

III. Algorithme de Lewis Carroll

12 - $A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^{(2)} = (-1)$ et enfin $A^{(3)} = (-8)$.

$$\boxed{\det M = -8.}$$

13 - Au cours de la procédure, on calcule $(n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ déterminants de format 2×2.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.}$$

14 - On développe $\det M$ une première fois suivant la première ligne. On obtient une combinaison linéaire de n déterminants de format $(n-1) \times (n-1)$. On redéveloppe chacun de ses déterminants suivant sa première ligne et chaque déterminant de format $(n-1) \times (n-1)$ est combinaison linéaire de $(n-1)$ déterminants de format $(n-2) \times (n-2)$. Ainsi, $\det M$ est combinaison linéaire de $n(n-1)$ déterminants de format $(n-2) \times (n-2)$. En continuant à développer systématiquement suivant la première ligne, $\det M$ est combinaison linéaire de $n(n-1)\ldots 3 = \dfrac{n!}{2}$ déterminants de format 2×2.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ v_n = \frac{n!}{2} \text{ et en particulier, } u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n).}$$

15 - Soit $(r,s) \in [\![1, n-2]\!]^2$. $A^{(2)}_{r,s} = \dfrac{1}{B^{(1)}_{r,s}} \times \begin{vmatrix} A^{(1)}_{r,s} & A^{(1)}_{r,s+1} \\ A^{(1)}_{r+1,s} & A^{(1)}_{r+1,s+1} \end{vmatrix} = \dfrac{A^{(1)}_{r,s}A^{(1)}_{r+1,s+1} - A^{(1)}_{r+1,s}A^{(1)}_{r,s+1}}{A^{(0)}_{r+1,s+1}}$ avec $A^{(0)}_{r+1,s+1} = M_{r+1,s+1}$, $A^{(1)}_{r,s} = \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \end{vmatrix}$, $A^{(1)}_{r,s+1} = \begin{vmatrix} M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \end{vmatrix}$, $A^{(1)}_{r+1,s} = \begin{vmatrix} M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s+1} \end{vmatrix}$ et $A^{(1)}_{r,s} = \begin{vmatrix} M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+2,s+1} & M_{r+2,s+2} \end{vmatrix}$.

Maintenant, la formule de condensation appliquée à la matrice $\begin{pmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s} & M_{r+2,s+2} \end{pmatrix}$ donne

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s} & M_{r+2,s+2} \end{vmatrix} \times M_{r+1,s+1} &= \begin{vmatrix} M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \end{vmatrix} \\ &= A^{(1)}_{r,s}A^{(1)}_{r+1,s+1} - A^{(1)}_{r,s+1}A^{(1)}_{r+1,s}, \end{aligned}$$

et donc $A^{(2)}_{r,s} = \dfrac{A^{(1)}_{r,s}A^{(1)}_{r+1,s+1} - A^{(1)}_{r+1,s}A^{(1)}_{r,s+1}}{M_{r+1,s+1}} = \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s} & M_{r+2,s+2} \end{vmatrix}$.

$$\boxed{A^{(2)}_{r,s} = \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s} & M_{r+2,s+2} \end{vmatrix} = \det[M]^{1,\ldots,s-1,s+3,\ldots,n}_{1,\ldots,r-1,r+3,\ldots,n},}$$

(avec une interprétation conventionnelle claire si $r = 1$ ou $s = 1$).

16 - Pour alléger on pose $\delta^{(k)}_{r,s} = \det[M]^{1,\ldots,s-1,s+k+1,\ldots,n}_{1,\ldots,r-1,r+k+1,\ldots,n}$ pour les r, s et k tels que $\delta^{(k)}_{r,s}$ ait un sens.

Si $k = 1$, $A^{(1)}_{r,s} = \begin{vmatrix} A^{(0)}_{r,s} & A^{(0)}_{r,s+1} \\ A^{(0)}_{r+1,s} & A^{(0)}_{r+1,s+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \end{vmatrix} = \det[M]^{1,\ldots,s-1,s+2,\ldots,n}_{1,\ldots,r-1,s+2,\ldots,n} = \delta^{(1)}_{r,s}$. La formule est donc vérifiée quand $k = 1$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, $A_{r,s}^{(k)} = \delta_{r,s}^{(k)}$ pour les r et s autorisés.

• Pour $k = 2$, c'est la question précédente.

• Soit $k \in [\![2, n-2]\!]$. Supposons que pour tous les r et s autorisés et tous les $i \in [\![2, k]\!]$, $A_{r,s}^{(i)} = \delta_{r,s}^{(i)}$. Alors

$$\begin{aligned}
A_{r,s}^{(k+1)} &= \frac{1}{A_{r+1,s+1}^{(k-1)}} \begin{vmatrix} A_{r,s}^{(k)} & A_{r,s+1}^{(k)} \\ A_{r+1,s}^{(k)} & A_{r+1,s+1}^{(k)} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\det[M]_{1,\dots,r-1,r+k,\dots,n}^{1,\dots,s-1,s+k,\dots,n}} \left(\det[M]_{1,\dots,r-1,r+k+1,\dots,n}^{1,\dots,s-1,s+k+1,\dots,n} \det[M]_{1,\dots,r,r+k+2,\dots,n}^{1,\dots,s,s+k+2,\dots,n}\right. \\
&\left. - \det[M]_{1,\dots,r,r+k+2,\dots,n}^{1,\dots,s-1,s+k+1,\dots,n} \det[M]_{1,\dots,r-1,r+k+1,\dots,n}^{1,\dots,s,s+k+2,\dots,n}\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \det[M]_{1,\dots,r-1,r+k+2,\dots,n}^{1,\dots,s-1,s+k+2,\dots,n} \text{ (d'après la formule de condensation)} \\
&= \delta_{r,s}^{(k+1)}.
\end{aligned}$$

La formule est démontrée par récurrence.

En particulier, si $k = n-1$ et $r = s = 1$, on obtient $A_{1,1}^{(n-1)} = \det M$ (quand $k = n-1$, on ne retire plus rien à la matrice M).

$$\boxed{A_{1,1}^{(n-1)} = \det M.}$$

IV. Le λ-déterminant

17 - Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\det_\lambda M_{t,j}$ est défini et que $\det_\lambda M_{t,j} = t\det_\lambda M$.

• C'est clair pour $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que pour toute matrice M de format au plus $n \times n$ telle que $\det_\lambda M$ soit bien défini, on ait : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\det_\lambda M_{t,j}$ est bien défini et est égal à $t \det_\lambda M$.
Soient M une matrice format $n+1$ tel que $\det_\lambda M$ soit bien défini (c'est-à-dire $\det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1} \neq 0$), $t \in \mathbb{R}^*$ et $j \in [\![1, n+1]\!]$.
La formule de condensation fournit

$$\det_\lambda M_{t,j} \ \det_\lambda [M_{t,j}]_{1,n+1}^{1,n+1} = \det_\lambda [M_{t,j}]_1^1 \det_\lambda [M_{t,j}]_{n+1}^{n+1} + \lambda \det_\lambda [M_{t,j}]_{n+1}^1 \det_\lambda [M_{t,j}]_1^{n+1} \quad (*)$$

1er cas. Supposons que $j \in \{1, n+1\}$. Dans ce cas, $\det_\lambda [M_{t,j}]_{1,n+1}^{1,n+1} = \det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1} \neq 0$.
Ensuite, on a $\det_\lambda [M_{t,j}]_1^1 \det_\lambda [M_{t,j}]_{n+1}^{n+1} = t \det_\lambda [M]_1^1 \det_\lambda [M]_{n+1}^{n+1}$ par hypothèse de récurrence car soit la colonne 1, soit la colonne $n+1$ a été multipliée par t. De même, $\lambda \det_\lambda [M_{t,j}]_{n+1}^1 \det_\lambda [M_{t,j}]_1^{n+1} = t \ \lambda \det_\lambda [M]_{n+1}^1 \det_\lambda [M]_1^{n+1}$. Finalement, l'égalité $(*)$ s'écrit

$$\det_\lambda M_{t,j} \ \det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1} = t\left(\det_\lambda [M]_1^1 \det_\lambda [M]_{n+1}^{n+1} + \lambda \det_\lambda [M]_{n+1}^1 \det_\lambda [M]_1^{n+1}\right) = t \det_\lambda M \ \det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1},$$

et puisque $\det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1} \neq 0$, $\det_\lambda M_{t,j}$ est bien défini et $\det_\lambda M_{t,j} = t\det_\lambda M$.

2ème cas. Supposons que $j \in [\![2, n]\!]$. Dans ce cas, par hypothèse de récurrence, $\det_\lambda \left([M_{t,j}]_{1,n+1}^{1,n+1}\right) = \det_\lambda \left([M]_{1,n+1}^{1,n+1}\right)_{t,j-1} = t \det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1} \neq 0$. Ensuite, toujours par hypothèse de récurrence,

$$\det_\lambda [M_{t,j}]_1^1 \det_\lambda [M_{t,j}]_{n+1}^{n+1} + \lambda \det_\lambda [M_{t,j}]_{n+1}^1 \det_\lambda [M_{t,j}]_1^{n+1} = t^2\left(\det_\lambda [M]_1^1 \det_\lambda [M]_{n+1}^{n+1} + \lambda \det_\lambda [M]_{n+1}^1 \det_\lambda [M]_1^{n+1}\right).$$

Finalement, l'égalité $(*)$ s'écrit

$$\det_\lambda M_{t,j} \ t \det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1} = t^2\left(\det_\lambda [M]_1^1 \det_\lambda [M]_{n+1}^{n+1} + \lambda \det_\lambda [M]_{n+1}^1 \det_\lambda [M]_1^{n+1}\right) = t^2 \det_\lambda M \ \det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1},$$

et puisque $t \det_\lambda [M]_{1,n+1}^{1,n+1} \neq 0$, $\det_\lambda M_{t,j}$ est bien défini et $\det_\lambda M_{t,j} = t\det_\lambda M$.

Le résultat est démontré par récurrence.
On a le même résultat en multipliant la ligne i par t car par récurrence $\det_\lambda {}^t M = \det_\lambda M$.

18 - On a déjà $\det_\lambda V(x_1) = 1$ et $\det_\lambda V(x_1, x_2) = \det_\lambda \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 + \lambda x_1$.

Ensuite, $\det_\lambda V(x_1, x_2, x_3) \det_\lambda (x_2) = \det_\lambda \begin{pmatrix} x_2 & x_2^2 \\ x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \det_\lambda \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} + \lambda \det_\lambda \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \det_\lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$ et donc puis que $x_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\det_\lambda V(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{x_2}\left((x_2 x_3^2 + \lambda x_2^2 x_3)(x_2 + \lambda x_1) + \lambda (x_3 + \lambda x_2)(x_1 x_2^2 + \lambda x_2 x_1^2)\right) \\
&= (x_3^2 + \lambda x_2 x_3)(x_2 + \lambda x_1) + \lambda (x_3 + \lambda x_2)(x_1 x_2 + \lambda x_1^2) \\
&= (x_3 + \lambda x_2)(x_2 + \lambda x_1)(x_3 + \lambda x_1).
\end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \geqslant 3$, $\det_\lambda V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)$.

- L'égalité a déjà été vérifiée quand $n=3$.
- Soit $n \geqslant 3$. Supposons la formule acquise pour un format au plus $n\times n$. Alors,

$$\det_\lambda[V(x_1,\ldots,x_{n+1})]_{1,n+1}^{1,n+1} = \det_\lambda\begin{pmatrix} x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & x_3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}$$

$$= x_2x_3\ldots x_n \det V_\lambda(x_2,\ldots,x_n) = x_2x_3\ldots x_n \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i) \neq 0.$$

(ce qui montre déjà que $\det_\lambda V(x_1,\ldots,x_{n+1})$ est bien défini). Ensuite,

- $\det_\lambda[V(x_1,\ldots,x_{n+1})]_1^1 = x_2\ldots x_{n+1}\det_\lambda V(x_2,\ldots,x_{n+1}) = x_2\ldots x_{n+1}\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j+\lambda x_i)$
- $\det_\lambda[V(x_1,\ldots,x_{n+1})]_{n+1}^{n+1} = \det_\lambda V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)$
- $\det_\lambda[V(x_1,\ldots,x_{n+1})]_{n+1}^1 = x_1\ldots x_n\det_\lambda V(x_1,\ldots,x_n) = x_1\ldots x_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)$
- $\det_\lambda[V(x_1,\ldots,x_{n+1})]_1^{n+1} = \det_\lambda V(x_2,\ldots,x_{n+1}) = \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j+\lambda x_i)$

Par suite,

$$\det_\lambda V(x_1,\ldots,x_{n+1})$$

$$= \frac{x_2\ldots x_{n+1}\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j+\lambda x_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i) + \lambda x_1\ldots x_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j+\lambda x_i)}{x_2x_3\ldots x_n\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)}$$

$$= x_{n+1}\prod_{i=2}^{n}(x_{n+1}+\lambda x_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i) + \lambda x_1\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)\prod_{i=2}^{n}(x_{n+1}+\lambda x_i)$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1}+\lambda x_i) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j+\lambda x_i).$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\det_\lambda V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i).}$$

