SESSION 2010

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME EPREUVE. FILIÈRE PC

A. Définition de $A_zP(X)$

1) Soit $z \in \mathbb{C}$.
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors, les polynômes $(z-X)P'(X)$ et $nP(X)$ sont dans $\mathbb{C}_n[X]$ et il en est de même de $A_zP(X)$. De plus, si a_n est le coefficient de X^n dans $P(X)$ alors le coefficient de X_n dans $A_zP(X)$ est $-na_n + na_n = 0$. Donc $A_zP(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Ainsi, A_z est une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, clairement linéaire. Donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ A_z \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n[X], \mathbb{C}_{n-1}[X]).}$$

2) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$,

$$\begin{aligned} A_{z_1}(A_{z_2}(P)) &= (z_1 - X)\left((z_2 - X)P'(X) + nP(X)\right)' + n\left((z_2 - X)P'(X) + nP(X)\right) \\ &= (z_1 - X)(z_2 - X)P''(X) + n(z_1 + z_2 - 2X)P'(X) + n^2P(X), \end{aligned}$$

puis en échangeant les rôles de z_1 et z_2,

$$A_{z_2}(A_{z_1}(P)) = (z_1 - X)(z_2 - X)P''(X) + n(z_1 + z_2 - 2X)P'(X) + n^2P(X) = A_{z_1}(A_{z_2}(P)).$$

$$\boxed{\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ A_{z_2}(A_{z_1}(P)) = A_{z_1}(A_{z_2}(P)).}$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$. La famille $\left((X - z)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ car les polynômes $(X - z)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont $n + 1$ éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ de degrés deux à deux distincts.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $A_z((X - z)^k) = (n - k)(X - z)^k$ ce qui reste vrai pour $k = 0$.

Soit alors $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(X - z)^k$. Puisque A_z est linéaire, $A_z(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n - k)a_k(X - z)^k$ puis

$$A_zP = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ (n - k)a_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n - 1]\!],\ a_k = 0 \Leftrightarrow P \in \text{Vect}\left((X - z)^n\right).$$

$$\boxed{\text{Ker}\,(A_z) = \text{Vect}\left((X - z)^n\right).}$$

Le théorème du rang fournit alors $\text{rg}\,(A_z) = n + 1 - \dim(\text{Ker}(A_z)) = n = \dim(\mathbb{C}_{n-1}[X])$. Par suite,

$$\boxed{\text{Im}\,(A_z) = \mathbb{C}_{n-1}[X].}$$

4) D'après la question précédente, la famille $\left((X - z)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme $\widehat{A_z}$. Donc l'endomorphisme $\widehat{A_z}$ est diagonalisable.
La famille de valeurs propres associée à cette base est $(n - k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. On en déduit que $\widehat{A_z}$ admet $n + 1$ valeurs propres simples et que les sous-espaces propres de $\widehat{A_z}$ sont des droites.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'endomorphisme } \widehat{A_z} \text{ est diagonalisable.} \\ \text{L'endomorphisme } \widehat{A_z} \text{ admet } n + 1 \text{ valeurs propres simples, les nombres } \lambda_k = n - k,\ 0 \leqslant k \leqslant n. \\ \text{Pour } 0 \leqslant k \leqslant n,\ E_{\lambda_k} = \text{Vect}\left((X - z)^k\right).\end{array}}$$

5) Soit E un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ commutant avec $\widehat{A_z}$. On sait que E laisse stable chaque droite propre de $\widehat{A_z}$. Donc, pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $E\left((X - z)^k\right) = \mu_k(X - z)^k$.

Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} \mu_k \prod_{i \neq k} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}$. Q est bien défini car les λ_k, $0 \leqslant k \leqslant n$ sont deux à deux distincts et Q est un polynôme tel que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $Q(\lambda_k) = \mu_k$. De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\widehat{A_z}\left((X-z)^k\right) = \lambda_k (X-z)^k$ et donc

$$\left(Q\left(\widehat{A_z}\right)\right)\left((X-z)^k\right) = Q(\lambda_k)(X-z)^k = \mu_k (X-z)^k = E\left((X-z)^k\right).$$

Ainsi, les endomorphismes $Q\left(\widehat{A_z}\right)$ et E coïncident sur une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc $E = Q\left(\widehat{A_z}\right)$.

B. Définition de δ_ξ

6) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. En posant $z' = f(z)$, on a

$$\begin{aligned}
z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z - z_0| = R \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z'} - re^{i\alpha}\right| = R \Leftrightarrow |1 - re^{i\alpha}z'|^2 = R^2|z'|^2 \text{ (car } z' = 0 \text{ n'est pas solution)}\\
\Leftrightarrow (r^2 - R^2)|z'|^2 - re^{i\alpha}z' - re^{-i\alpha}\overline{z'} + 1 = 0\\
\Leftrightarrow \left(z' - \frac{re^{-i\alpha}}{r^2 - R^2}\right)\left(\overline{z'} - \frac{re^{i\alpha}}{r^2 - R^2}\right) - \frac{r^2}{(r^2 - R^2)^2} + \frac{1}{r^2 - R^2} = 0 \Leftrightarrow \left|z' - \frac{re^{-i\alpha}}{r^2 - R^2}\right|^2 = \frac{R^2}{(r^2 - R^2)^2}\\
\Leftrightarrow \left|z' - \frac{re^{-i\alpha}}{r^2 - R^2}\right| = \frac{R}{r^2 - R^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $z \in \mathcal{C}$ si et seulement si $f(z)$ appartient au cercle de centre $\frac{re^{-i\alpha}}{r^2 - R^2}$ et de rayon $\frac{R}{r^2 - R^2}$.

$$\boxed{f(\mathcal{C}) \text{ est le cercle de centre } \frac{re^{-i\alpha}}{r^2 - R^2} = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2 - R^2} \text{ et de rayon } \frac{R}{r^2 - R^2}.}$$

On note de plus que $\left|0 - \frac{re^{-i\alpha}}{r^2 - R^2}\right| = \frac{r}{r^2 - R^2} > \frac{R}{r^2 - R^2}$ et donc 0 appartient à $f(\mathcal{C}^+)$.

7) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. En remplaçant $=$ par $<$ dans les calculs précédents, on obtient

$$\begin{aligned}
z \in \mathcal{C}^- \Leftrightarrow |z - z_0| < R\\
\Leftrightarrow \left|z' - \frac{re^{-i\alpha}}{r^2 - R^2}\right| < \frac{R}{r^2 - R^2} \Leftrightarrow z' \in f(\mathcal{C})^-.
\end{aligned}$$

Ainsi, $z \in \mathcal{C}^-$ si et seulement si $f(z)$ appartient $f(\mathcal{C})^-$ et donc

$$\boxed{f(\mathcal{C}^-) = f(\mathcal{C})^-.}$$

8) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $z_0 = re^{i\alpha}$ et de rayon $R > 0$. Puisque $0 \in \mathcal{C}^+$, on a $0 \notin \mathcal{C}^-$ et donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $z_i \neq 0$. Ensuite, d'après la question précédente, chaque $\frac{1}{z_i} = f(z_i)$ est dans $f(\mathcal{C}^-) = f(\mathcal{C})^-$.

Maintenant, puisque $f(\mathcal{C})$ est un cercle, il est connu que $f(\mathcal{C})^-$ est convexe et donc $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)$ est dans $f(\mathcal{C})^-$. En particulier, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i) \neq 0$ et donc δ_0 est bien défini par l'égalité

$$f(\delta_0) = \frac{1}{\delta_0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i).$$

Ensuite, comme $f(\delta_0)$ est dans $f(\mathcal{C})^-$, $\delta_0 = f(f(\delta_0))$ est dans $f(f(\mathcal{C})^-) = (f(f(\mathcal{C})))^- = \mathcal{C}^-$.

9) Soit $\xi \in \mathcal{C}^+$. On note t la translation de vecteur d'affixe $-\xi$, puis $\mathcal{C}'$, z'_1, ..., z'_n, δ'_ξ les images par t de $\mathcal{C}$, z_1, ..., z_n, δ_ξ.
La condition $\xi \in \mathcal{C}^+$ équivaut à la condition $0 = \xi - \xi \in \mathcal{C}'^+$. D'après la question précédente, δ'_ξ est bien défini par l'égalité $\frac{1}{\delta'_\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z'_i}$ et est élément de $\mathcal{C}'^-$. Mais alors δ_ξ est bien défini par l'égalité $\frac{1}{\delta_\xi - \xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i - \xi}$ et de plus, δ_ξ est élément de $t^{-1}(\mathcal{C}'^-) = \mathcal{C}^-$.

C. Condition d'apolarité

10) Soit $\xi \notin \{z_i,\ i \in \{1,\ldots,n\}\}$. Alors $P(\xi) \neq 0$ puis

$$P'(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k\neq i}(\xi - z_k)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{P(\xi)}{\xi - z_i},$$

et donc $\dfrac{P'(\xi)}{P(\xi)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi - z_i}$ ou encore $\dfrac{P'(\xi)}{P(\xi)} = -\dfrac{n}{\delta_\xi - \xi}$. Par suite,

$$\text{si } P'(\xi) \neq 0,\ \delta_\xi = \xi - n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}.$$

11) Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $\xi \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
A_zP(\xi) = 0 &\Leftrightarrow (z-\xi)P'(\xi) + nP(\xi) = 0 \Leftrightarrow (P(\xi) = P'(\xi) = 0) \text{ ou } (P'(\xi) \neq 0 \text{ et } z = \xi - n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)})\\
&\Leftrightarrow (\xi \text{ racine double de } P) \text{ ou } (\delta_\xi = z)\\
&\Leftrightarrow (\exists i \in [\![1,n]\!]/\ \xi = z_i \text{ et } P'(z_i) = 0) \text{ ou } (\delta_\xi = z)\\
&\Leftrightarrow \xi \in \{z_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ P'(z_i) = 0\} \cup \{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1,\ldots,n\}\},\ \delta_\xi = z\}.
\end{aligned}$$

12) On sait déjà que $A_zP = (z-X)P' + nP$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$. De plus, $P = X^n - \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i\right)X^{n-1} + \ldots$ et donc le coefficient de X^{n-1} dans A_zP est $nz + (n-1)\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i - n\sum_{i=1}^{n} z_i = nz - \sum_{i=1}^{n} z_i$ et donc A_zP est de degré strictement inférieur à $n-1$ si et seulement si $nz - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i = 0$ ou encore $z = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i$.

13) Puisque $\mathcal{C}_1^-$ est convexe, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i$ est élément de $\mathcal{C}_1^-$ et puisque $z \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1^+$ et que les ensembles $\mathcal{C}_1^-$ et $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1^+$ sont disjoints, on a $z \neq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i$. D'après la question précédente, A_zP est de degré $n-1$ exactement.

D'après la question 11, un zéro de A_zP est soit l'un des z_i et dans ce cas est dans $\mathcal{C}_1^-$, soit différent de chaque z_i et dans ce cas égal à un certain $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i,\ i \in \{1,\ldots,n\}\}$ tel que $\delta_\xi = z$.

Dans ce dernier cas, on choisit un cercle $\mathcal{C}_2$ de même centre z_0 que $\mathcal{C}_1$, de rayon R_2 strictement inférieur au rayon R_1 de $\mathcal{C}_1$ et tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|z_i - z_0| < R_2$ (on peut par exemple prendre $R_2 = \dfrac{1}{2}(R_1 + \text{Max}\{|z_i - z_0|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\})$). Avec ce cercle $\mathcal{C}_2$, on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $z_i \in \mathcal{C}_2^-$ et $z \in \mathcal{C}_2^+$.

D'après la question 9, si $\xi \in \mathcal{C}_2^+$, alors $\delta_\xi = z$ appartient à $\mathcal{C}_2^-$ et en particulier à $\mathcal{C}_1^-$ ce qui n'est pas. Donc ξ appartient à $\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_2^-$ et en particulier à $\mathcal{C}_1^-$.

On a montré que les $n-1$ zéros de A_zP sont dans $\mathcal{C}_1^-$.

14) Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $z'_i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^+$.
D'après la question précédente, $A_{z'_n}P$ est un polynôme de degré $n-1$ exactement dont les $n-1$ zéros appartiennent à $\mathcal{C}^-$ et plus généralement, si pour $k \in [\![0,n-2]\!]$, $A_{z'_{n-k}}\ldots A_{z'_n}P$ est un polynôme de degré $n-k$ dont les $n-k$ zéros sont dans $\mathcal{C}^-$, alors $A_{z'_{n-k-1}}\ldots A_{z'_n}P$ est un polynôme de degré $n-k-1$ dont les $n-k-1$ zéros sont dans $\mathcal{C}^-$.
Ceci montre par récurrence que $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $A_{z'_{n-k}}\ldots A_{z'_n}P$ est un polynôme de degré $n-k$ dont les $n-k$ zéros sont dans $\mathcal{C}^-$. En particulier, $A_{z'_1}\ldots A_{z'_n}P$ est un polynôme de degré 0 et n'est donc pas nul.

Par contraposition, si P est apolaire à Q, alors l'un des z'_i au moins est dans $\mathcal{C}^-$.

15) Soient $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ puis $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\binom{n-1}{k}X^k$.

$$\int_0^1 T(a + t(b-a))\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\binom{n-1}{k}\int_0^1 (a + t(b-a))^k\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\binom{n-1}{k}\frac{1}{k+1}\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}$$

et on peut prendre $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $b_{n-1-k} = \dfrac{(-1)^{n-1-k}}{n-k}\dfrac{b^{n-k} - a^{n-k}}{b-a}$.

16)

$$\begin{aligned}
\Delta(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k \binom{n-1}{k} X^k = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{n-k} \left(b^{n-k} - a^{n-k}\right) \binom{n-1}{k} X^k \\
&= \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \left(b^{n-k} - a^{n-k}\right) X^k \\
&= \frac{1}{n(b-a)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n}{k} \left(b^{n-k} - a^{n-k}\right) X^k \\
&= \frac{1}{n(b-a)} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-a)^{n-k} - X^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-b)^{n-k} + X^n \right) \\
&= \frac{1}{n(b-a)} ((X-a)^n - (X-b)^n).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta(X) = \frac{1}{n(b-a)} ((X-a)^n - (X-b)^n).}$$

17) D'après l'égalité admise par l'énoncé,

$$(-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} \dots A_{t_{n-1}} \Delta(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} a_k b_{n-1-k} = \int_0^1 P'(a + t(b-a))\, dt = \frac{P(b) - P(a)}{b-a} = 0$$

et donc $\Delta(X)$ est apolaire par rapport à $P'(X)$ car $a_{n-1} = n\text{dom}(P) \neq 0$.

Déterminons les zéros de $\Delta(X)$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\Delta(z) = 0 &\Leftrightarrow (z-a)^n = (z-b)^n \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] /\ z - b = e^{2ik\pi n}(z-a) \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] /\ z(1 - e^{2ik\pi/n}) = b - e^{2ik\pi/n} a \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] /\ z = \frac{b - e^{2ik\pi/n} a}{1 - e^{2ik\pi/n}} \text{ (l'équation proposée n'a pas de solution quand } k = 0)
\end{aligned}$$

Les zéros de Δ sont donc les $\alpha_k = \dfrac{b - e^{2ik\pi/n} a}{1 - e^{2ik\pi/n}}$, $k \in [\![1, n-1]\!]$. Maintenant, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\left| \alpha_k - \frac{a+b}{2} \right| &= \left| \frac{b - e^{2ik\pi/n} a}{1 - e^{2ik\pi/n}} - \frac{a+b}{2} \right| = \left| \frac{b(1 + e^{2ik\pi/n}) - a(1 + e^{2ik\pi/n})}{2(1 - e^{2ik\pi/n})} \right| = \frac{|b-a|}{2} \left| \frac{e^{ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}} \times \frac{e^{-ik\pi/n} + e^{ik\pi/n}}{e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}} \right| \\
&= \frac{|b-a|}{2} \left| \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right|.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{2}$, cotan $\left| \text{cotan}\left(\dfrac{(n-k)\pi}{n}\right) \right| = \left| \text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \right|$ et donc

$$\begin{aligned}
\text{Max}\left\{ \left| \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right|,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1 \right\} &= \text{Max}\left\{ \left| \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right|,\ 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} \right\} = \text{Max}\left\{ \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} \right\} \\
&= \text{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

car la fonction cotangente est positive et décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Finalement, tous les α_k sont dans le disque $D_{a,b,n}$ défini dans le préambule.

Puisque Δ est apolaire à P', la question 14 permet d'affirmer que P' admet au moins une racine dans tout disque ouvert contenant $D_{n,a,b}$. Soient $r = \text{Min}\left\{ \left| t_k - \dfrac{a+b}{2} \right|,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$ puis t une racine de P' telle que $\left| t - \dfrac{a+b}{2} \right| = r$.
t appartient à tout disque ouvert contenant le disque fermé $D_{n,a,b}$ et donc $t \in D_{n,a,b}$. Le théorème 1 est démontré.

