SESSION 2010

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE EPREUVE. FILIÈRE PC

I. Préliminaires

Q1 Soit $(f,g)\mathcal{P}(\mathbb{R})\times\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, en posant $M=\underset{t\in\mathbb{R}}{\text{Sup}}|g(t)|$, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)g(x-t)|\leqslant Mf(t)$. Maintenant, la fonction f est continue positive d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1 et en particulier, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction Mf puis de la fonction $t\mapsto f(t)g(x-t)$. Donc $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$. La démarche est analogue et le résultat identique si $f\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $g\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Posons $\Phi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}\\(x,t)&\mapsto&f(t)g(x-t)\end{array}$ de sorte que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f*g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,t)\,dt$.

• Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
• Pour chaque $t\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\Phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
• Pour chaque $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, la fonction $|\Phi(x,t)|=f(t)|g(x-t)|\leqslant Mf(t)=\varphi(t)$ où φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall(f,g)\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\times\mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ f*g\text{ est définie et continue sur }\mathbb{R}.}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto x-t=u$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En posant $u=x-t$, on obtient

$$g*f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)f(x-t)\,dt=\int_{+\infty}^{-\infty}g(x-u)f(u)\,(-du)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)\,du=f*g(x).$$

Donc

$$\boxed{\forall(f,g)\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\times\mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ f*g=g*f.}$$

Ces résultats sont conservés si $(f,g)\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R})\times\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q2 On suppose que $f\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$, posons $h_n(t)=f(t)g(x_n-t)$ de sorte que $f*g(x_n)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(t)\,dt$.

• Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, la fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}$.
• Pour chaque $t\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(t)g(x_n-t)=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$. Donc la suite de fonctions h_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. De plus, la fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}$, $|h_n(t)|\leqslant\|g\|_\infty f(t)=\varphi(t)$ où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(f*g(x_n))$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}f*g(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}h_n(t)\,dt=0.$$

On a montré que pour toute suite réelle (x_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f*g(x_n)=0$.

Montrons alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}f*g(x)=0$. Dans le cas contraire, $\exists\varepsilon>0/\ \forall A>0,\ \exists x\geqslant A/\ |f*g(x)|\geqslant\varepsilon$.

En particulier, pour $A=n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n\geqslant n$ tel que $|f*g(x_n)|>\varepsilon$. Mais alors la suite (x_n) est une suite telle $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ et la suite $(f*g(x_n))$ ne converge pas vers 0. Ceci est absurde et on a donc montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}f*g(x)=0$.

Tout ce qui précède s'applique aussi à $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f*g(x)=0$.

$$\boxed{\forall(f,g)\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\times\mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ \lim_{x\to+\infty}f*g(x)=0\text{ et }\lim_{x\to-\infty}f*g(x)=0.}$$

Q3 Soit $(f, g) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2$. Alors f et g sont continues et positives sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de $f * g$ (dans la question 1, seul le fait que g soit bornée sur $\mathbb{R}$ importait). Ensuite, g est bornée sur $\mathbb{R}$ et en notant M un majorant de g sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel x,

$$0 \leqslant f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt \leqslant M \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = M.$$

Ainsi, la fonction $f * g$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Vérifions enfin que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)\ dx = 1$.

• Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(u-t)|\ du$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(v)g(x-v)\ dv$ convergent.
• Les deux fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt = f * g(x)$ et $t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dx = f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\ du = f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
• La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dx = f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\ du = f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x,t)\ dt\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\ dx\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall (f, g) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2,\ f * g \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).}$$

II. Une classe d'opérateurs sur $C_0(\mathbb{R})$

Q4 Soit $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|(T_f(u))(x)| = |f * u(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(x-t)\ dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)|u(x-t)|\ dt \leqslant \|u\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \|u\|_\infty,$$

Ainsi, $\|u\|_\infty$ est un majorant de la fonction $|T_f(u)|$ sur $\mathbb{R}$ et puisque $\|T_f(u)\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants, on a montré que $\|T_f(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty$.

$$\boxed{\forall (f, u) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ \|T_f(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.}$$

Q5 Soient f et g dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et u dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

$$T_f T_g(u) = f * (g * u) = (f * g) * u = (g * f) * u = g * (f * u) = T_g T_f(u).$$

$$\boxed{\forall (f, g) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ T_f T_g = T_g T_f.}$$

Q6 Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Pour u dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty &= \|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{f_1}T_{g_2}(u) + T_{f_1}T_{g_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty \\ &\leqslant \|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{f_1}T_{g_2}(u)\|_\infty + \|T_{f_1}T_{g_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty \\ &= \|T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))\|_\infty + \|T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))\|_\infty \\ &\leqslant \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty + \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty \text{ (d'après la question Q4).}\end{aligned}$$

Q7 Soient f et g dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et u dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_\infty \leqslant n\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty$.

• C'est vrai pour $n = 1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_\infty \leqslant n\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty$. Alors

$$\begin{aligned}\|(T_f)^{n+1}(u) - (T_g)^{n+1}(u)\|_\infty &= \|T_f T_{f^{*n}}(u) - T_g T_{g^{*n}}(u)\|_\infty \\ &\leqslant \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + \|T_{f^{*n}}(u) - T_{g^{*n}}(u)\|_\infty \text{ (d'après la question précédente)} \\ &\leqslant \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + n\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty = (n+1)\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall (f,g)\in(\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2,\ \forall u\in\mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|(T_f)^n(u)-(T_g)^n(u)\|_\infty\leqslant n\|T_f(u)-T_g(u)\|_\infty.}$$

III. Lois normales

Q8 Soit $h>0$. Pour tout réel x, $g_h(x)=\dfrac{1}{h}g_1\left(\dfrac{x}{h}\right)$. La fonction g_h est continue positive et bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, en posant $u=\dfrac{x}{h}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x)\ dx=\int_{-\infty}^{+\infty} g_1\left(\frac{x}{h}\right)\ \frac{dx}{h}=\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\ du=1.$$

Ceci montre que $g_h\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Les deux fonctions $x\mapsto xg_h(x)$ et $x\mapsto x^2g_h(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et négligeables en $+\infty$ ou $-\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$. Donc ces fonctions sont intégrables sur $\mathbb{R}$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg_h(x)=0$ car la fonction $x\mapsto xg_h(x)$ est impaire.

Soit alors $A>0$. Les deux fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \dfrac{h}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A x^2g_h(x)\ dx&=\int_0^A x\frac{x}{h\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\ dx\\&=\left[-x\frac{h}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\right]_0^A+\int_0^A\frac{h}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\ dx.\end{aligned}$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2g_h(x)\ dx=\frac{h}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\ dx$ puis par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g_h(x)\ dx=\frac{h}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\ dx=\frac{h}{\sqrt{2\pi}}\times h\sqrt{2\pi}=h^2.$$

$$\boxed{\forall h>0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} xg_h(x)\ dx=0\text{ et }\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g_h(x)\ dx=h^2.}$$

Q9 Le résultat est clair si $n=1$.

Soient $h>0$ et $n\geqslant 2$. Montrons par récurrence que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^k=T_{g_{h\sqrt{\frac{k}{n}}}}$.

- L'égalité est vraie quand $k=1$.
- Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Supposons que $\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^k=T_{g_{h\sqrt{\frac{k}{n}}}}$. Alors

$$\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^{k+1}=T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^k=T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}T_{g_{h\sqrt{\frac{k}{n}}}}=T_{g_{\sqrt{\frac{h^2}{n}+h^2\frac{k}{n}}}}=T_{g_{h\sqrt{\frac{k+1}{n}}}}.$$

Le résultat est démontré par récurrence. Pour $k=n$, on obtient en particulier $\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n=T_{g_{h\sqrt{\frac{n}{n}}}}=T_{g_h}$. Enfin, $\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n=T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\dots T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}=T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}*g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}*\dots*g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}=T_{\left(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}\right)^{*n}}$. On a montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_{g_h}=\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n=T_{\left(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}\right)^{*n}}.}$$

IV. Convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Q10 Soit $h>0$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme $P_{k,h}$ de degré k tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left(\dfrac{d^k}{dx^k}g_h\right)(x)=P_{k,h}(x)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$.

• Le résultat est vrai pour $k = 0$ en prenant $P_{0,h} = \dfrac{1}{h\sqrt{2\pi}}$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un polynôme $P_{k,h}$ de degré k tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{d^k}{dx^k} g_h\right)(x) = P_{k,h}(x)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$. Alors, pour tout réel x,

$$\left(\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} g_h\right)(x) = \left(\left(\frac{d^k}{dx^k} g_h\right)\right)'(x) = \left(P'_{k,h}(x) - \frac{x}{h^2}P_{k,h}\right)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}.$$

Si on pose $P_{k+1,h} = -\dfrac{X}{h^2}P_{k,h} + P'_{k,h}$, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $P_{k+1,h}$ est un polynôme de degré $k+1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} g_h\right)(x) = P_{k+1,h}(x)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Q11 Soient h et a deux réels strictement positifs et k un entier naturel. La fonction $u \mapsto P_{k,h}(u)e^{-\frac{u^2}{4h^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$. Par suite, cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc il existe un réel $M_k > 0$ tel que $\forall x \in [-a, a]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}\right| \leqslant M_k$ et donc

$$\forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left|P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}\right| = \left|P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \times e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}\right| \leqslant M_k e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}.$$

Soit alors $x \in [-a, a]$ et $t \in \mathbb{R}$.

- Si $t \in [-a, a]$, on a $M_k e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leqslant M_k$.
- Si $|t| \geqslant a$, alors $|x-t| \geqslant |t| - |x| \geqslant |t| - a \geqslant 0$. Par croissance de la fonction $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $-\dfrac{(x-t)^2}{4h^2} = -\dfrac{|x-t|^2}{4h^2} \leqslant -\dfrac{(|t|-a)^2}{4h^2}$. Finalement,

$$\forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left|P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}\right| \leqslant \phi_k(t) \text{ où } \phi_k(t) = \begin{cases} M_k \text{ si } t \in]-a, a[\\ M_k e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}} \text{ si } |t| \geqslant a \end{cases}.$$

La fonction ϕ_k est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, est intégrable sur $\mathbb{R}$ car est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et $-\infty$ d'après un théorème de croissance comparées et enfin $\phi_k(t)$ ne dépend que de h, a, k et t.

Q12 Soient $h > 0$ et $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $a > 0$ et soit $\Phi : \begin{array}{ccc} [-a, a] \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & g_h(x-t)u(t) \end{array}$ de sorte que $\forall x \in [-a, a]$, $T_{g_h}(u)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi(x, t)\ dt$.

• Pour chaque $x \in [-a, a]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
• La fonction Φ admet sur $[-a, a] \times \mathbb{R}$ des dérivées partielles à tous ordres par rapport à sa première variable x définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R},\ \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t) = \frac{d^k}{dx^k} g_h(x-t)u(t) = P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}u(t).$$

De plus,

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a, a]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur $[-a, a]$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant \|u\|_\infty \phi_k(t) = \varphi_k(t)$ où φ_k est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $T_{g_h}(u)$ est de classe C^∞ sur $[-a, a]$ et ceci pour tout $a > 0$, et de plus ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le symbole d'intégration. On a donc montré que

$$\boxed{\forall h > 0,\ \forall u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ T_{g_h}(u) \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left(T_{g_h}(u)\right)^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k,h}(x-t)e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}u(t)\ dt.}$$

Q13 Soient $h > 0$ et $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. On sait déjà que la fonction $T_{g_h}(u)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(T_{g_h}(u))^{(k)} = g_{h,k} * u$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{h,k}(x) = P_{k,h}(x)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction $g_{h,k}$ est continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$ et que la fonction u est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, la partie I montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_{h,k} * u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g_{h,k} * u(x) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall h > 0,\ \forall u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ T_{g_h}(u) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).}$$

Q14 Soit $\alpha > 0$.

$$\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)\right)^2\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha/h}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \int_{\alpha/h}^{+\infty} g_1(x)\ dx.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_1(x)\ dx$ converge en $+\infty$ et que $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\alpha}{h} = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{h\to0^+}\displaystyle\int_{\alpha/h}^{+\infty} g_1(x)\ dx = 0$ et donc que $\lim\limits_{h\to0^+}\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt = 0$. Par parité, on a aussi $\lim\limits_{h\to0^+}\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ dt = 0$.

$$\boxed{\forall \alpha > 0,\ \lim_{h\to0^+}\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ dt = \lim_{h\to0^+}\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt = 0.}$$

Q15 Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|T_{g_h}(x) - u(x)| &= \left|\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)u(x-t)\ dt\right) - u(x)\right| = \left|\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)u(x-t)\ dt\right) - u(x)\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)\ dt\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)(u(x-t) - u(x))\ dt\right| \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)|u(x-t) - u(x)|\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)|u(x-t) - u(x)|\ dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)|u(x-t) - u(x)|\ dt + \int_\alpha^{+\infty} g_h(t)|u(x-t) - u(x)|\ dt \\
&\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)|u(x-t) - u(x)|\ dt + \|u\|_\infty\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ dt + \|u\|_\infty\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt \\
&= \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)|u(x-t) - u(x)|\ dt + 2\|u\|_\infty\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt \text{ (car } g_h \text{ est paire)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)\ dt + 2\|u\|_\infty\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt \text{ (car } \forall t \in [-\alpha, \alpha],\ |(x-t) - x| = |t| \leqslant \alpha) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g_h(t)\ dt + 2\|u\|_\infty\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt = \frac{\varepsilon}{2} + 2\|u\|_\infty\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $|T_{g_h}(x) - u(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + 2\|u\|_\infty\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt$ et donc

$$\|T_{g_h}(u) - u\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\|u\|_\infty\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt.$$

Maintenant, d'après la question précédente, $\lim\limits_{h\to0^+}\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt = 0$ et donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$0 < h < \eta \Rightarrow \int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ dt < \frac{\varepsilon}{2(2\|u\|_\infty + 1)}.$$

Pour $0 < h < \eta$, on a alors

$$\|T_{g_h}(u) - u\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\|u\|_\infty\frac{\varepsilon}{2(2\|u\|_\infty + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0/$, $\forall h \in \mathbb{R}$, $(0 < h < \eta \Rightarrow \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty < \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{h\to0^+}\|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0$.

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ \lim_{h\to0^+}\|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0.}$$

Q16 Soit $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty &= \|(T_{f_n}(u) - T_{f_n}T_{g_h}(u)) + (T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)) + (T_fT_{g_h}(u) - T_f(u))\|_\infty \\ &\leqslant \|T_{f_n}(u - T_{g_h}(u))\|_\infty + \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty + \|T_f(T_{g_h}(u) - u)\|_\infty \\ &\leqslant 2\|u - T_{g_h}(u)\|_\infty + \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty \text{ (d'après la question 4).}\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{h\to 0^+} 2\|u - T_{g_h}(u)\|_\infty = 0$ et on peut donc choisir $h > 0$ tel que $2\|u - T_{g_h}(u)\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$. h est dorénavant fixé ainsi.

Pour tout entier naturel n, on a $\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2} + \|T_{f_n}(T_{g_h}(u)) - T_f(T_{g_h}(u))\|_\infty$ où cette fois-ci la fonction $T_{g_h}(u)$ est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ d'après la question 13. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(T_{g_h}(u)) - T_f(T_{g_h}(u))\|_\infty = 0$ et donc il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|T_{f_n}(T_{g_h}(u)) - T_f(T_{g_h}(u))\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant 0 \Rightarrow \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty < \varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$.

Ainsi, pour tout u de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$ et donc la suite (f_n) converge faiblement vers f.

Q17 Soient $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \neq 0$, on pose $v(t) = \dfrac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2}$. Quand t tend vers 0,

$$u(x-t) = u(x) - tu'(x) + \frac{(-t)^2}{2}u''(x) + o(t^2)$$

et donc $v(t) = \dfrac{1}{2}u''(x) + o(1)$. On en déduit que la fonction v se prolonge par continuité en 0 en posant $v(0) = \dfrac{1}{2}u''(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt = 1$,

$$\begin{aligned}n\left(T_{f_n}(u)(x) - u(x)\right) - \frac{1}{2}u''(x) &= n\left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)f_n(t)\ dt\right) - u(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt\right) - \frac{1}{2}u''(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x-t) - u(x))\ nf_n(t)\ dt - \frac{1}{2}u''(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t) - u(x)}{t^2} f_n^{\#}(t)\ dt - \frac{1}{2}u''(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)\right) f_n^{\#}(t)\ dt.\end{aligned}$$

Ensuite, en posant on obtient $t = \sqrt{n}w$, on obtient

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}wf(\sqrt{n}w)\ \sqrt{n}dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{n}wf_n(w)\ dw = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{wf_n^{\#}(w)}{w^2}\ dw$$

et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf_n^{\#}(t)}{t^2}\ dt = 0$. On en déduit que

$$n\left(T_{f_n}(u)(x) - u(x)\right) - \frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)\right) f_n^{\#}(t)\ dt + u'(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf_n^{\#}(t)}{t^2}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)\right) f_n^{\#}(t)\ dt.$$

Q18 Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

• Soit α un réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $v = \sqrt{n}t$, on obtient

$$\int_\alpha^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt = \int_\alpha^{+\infty} nt^2 \times \sqrt{n}f\left(\sqrt{n}t\right)\ dt = \int_{\alpha\sqrt{n}}^{+\infty} v^2f(v)\ dv.$$

Mais alors, puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v^2f(v)\ dv$ converge, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f_n^{\#}(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha\sqrt{n}}^{+\infty} v^2f(v)\ dv = 0$. De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^{\#}(t)\ dt = 0$.

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $w(t) = \dfrac{u(x-t) - u(x) + tu'(t)}{t^2} - \dfrac{1}{2}u''(x)$ si $t \neq 0$ et 0 si $t = 0$. Puisque la fonction u est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'écrire pour tout $t \neq 0$,

$$|w(t)| = \frac{1}{t^2}\left|u(x-t) - u(x) + tu'(x) - \frac{t^2}{2}u''(x)\right| \leqslant \frac{1}{t^2} \times \|u^{(3)}\|_\infty \frac{|t|^3}{6} = \|u^{(3)}\|_\infty \frac{|t|}{6},$$

ce qui reste vrai quand $t = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)\right) f_n^\#(t)\,dt\right| &\leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |w(t)| f_n^\#(t)\,dt \leqslant \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\int_{-\alpha}^{\alpha} |t| f_n^\#(t)\,dt \\ &\leqslant \frac{\alpha\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_n^\#(t)\,dt \leqslant \frac{\alpha\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^\#(t)\,dt = \frac{\alpha\|u^{(3)}\|_\infty}{6}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\alpha}^{+\infty} w(t) f_n^\#(t)\,dt\right| &\leqslant \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{|u(x-t)|}{t^2} + \frac{|u(x)|}{t^2} + \frac{|u'(x)|}{|t|} + \frac{1}{2}|u''(x)|\right) f_n^\#(t)\,dt \\ &\leqslant \left(2\frac{\|u\|_\infty}{\alpha^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\alpha} + \frac{\|u''\|_\infty}{2}\right)\int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t)\,dt\end{aligned}$$

et de même $\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} w(t) f_n^\#(t)\,dt\right| \leqslant \left(2\dfrac{\|u\|_\infty}{\alpha^2} + \dfrac{\|u'\|_\infty}{\alpha} + \dfrac{\|u''\|_\infty}{2}\right)\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t)\,dt.$

• En résumé, pour tout réel x, pour tout $\alpha > 0$, pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned}\left|n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) f_n^\#(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{\alpha\|u^{(3)}\|_\infty}{6} + A\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t)\,dt\right)\end{aligned}$$

où $A = 2\dfrac{\|u\|_\infty}{\alpha^2} + \dfrac{\|u'\|_\infty}{\alpha} + \dfrac{\|u''\|_\infty}{2}$ et finalement pour tout réel $\alpha > 0$ et tout entier naturel non nul n,

$$\left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty \leqslant \frac{\alpha\|u^{(3)}\|_\infty}{6} + A\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t)\,dt\right).$$

• Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{\alpha\|u^{(3)}\|_\infty}{6} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (par exemple $\alpha = \dfrac{3\varepsilon}{1 + \|u^{(3)}\|_\infty}$). α est dorénavant ainsi fixé. Pour tout entier naturel non nul n, on a alors

$$\left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + A\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t)\,dt\right).$$

Mais d'après le début de la question, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t)\,dt\right) = 0$ et donc il existe un entier naturel non nul n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $A\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t)\,dt\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a alors $\left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \dfrac{1}{2}u''\right\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* /\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \dfrac{1}{2}u''\right\|_\infty < \varepsilon\right)$ et donc

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}),\ \lim_{n\to+\infty} \left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty = 0.}$$

Q19 Soit $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned}\|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty &= \left\|(T_{f_n})^n(u) - \left(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}\right)^n(u)\right\|_\infty \quad \text{(d'après la question 9)} \\ &\leqslant n\left\|T_{f_n}(u) - T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}\right\|_\infty \quad \text{(d'après la question 7)} \\ &= \left\|\left(n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right) - \left(n(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}} - u) - \frac{1}{2}u''\right)\right\|_\infty \\ &\leqslant \left\|\left(n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right)\right\|_\infty + \left\|\left(n(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}} - u) - \frac{1}{2}u''\right)\right\|_\infty.\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, $g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{n}e^{-(\sqrt{n}x)^2/2} = \sqrt{n}g_1(\sqrt{n}x)$ et donc $g_{\frac{1}{\sqrt{n}}} = h_n$ où $h = g_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

D'après la question 18, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\left(n(T_{f_n}(u) - u) - \dfrac{1}{2}u''\right)\right\|_\infty = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\left(n(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}} - u) - \dfrac{1}{2}u''\right)\right\|_\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\left(T_{f_n}\right)^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$.

On a montré que $\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_{f_n^{*n}}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$. La question 16 permet alors d'affirmer que la suite $(f_n^{*n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers g_1.

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \text{la suite } (f_n^{*n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge faiblement vers } g_1.}$$

