A 2010 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2010

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Si A est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{C}(A)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de A dans $\mathbb{C}$. Les notations D, $\overline{D}$ et T désignent respectivement

- le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$
- le disque fermé $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leqslant 1\}$
- le cercle $T = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$.

À une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ quelconque on associe

- les coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\mathrm{d}t \qquad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

- la fonction $g_f : D \to \mathbb{C}$ définie par la formule suivante, dont l'existence sera traitée dans la question 1) :

$$g_f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\overline{z}^n$$

  où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z ;
- la fonction $G_f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$G_f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in T \\ g_f(z) & \text{si } z \in D. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n et q_n les fonctions de $\mathscr{C}(T)$ définis par

$$\begin{aligned} p_n(z) &= z^n \\ q_n(z) &= \overline{z}^n \end{aligned} \qquad (\forall z \in T).$$

Le but du problème est de caractériser de différentes manières le prolongement G_f de f à $\overline{D}$.

A. Prolongement harmonique

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ on note $\widetilde{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x+iy \in U\}$. Pour toute fonction $u : U \to \mathbb{C}$, on note $\widetilde{u} : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par la formule $u(x,y) = u(x+iy)$. La fonction u est dite de *classe* C^2 si $\widetilde{u}$ est de classe C^2 au sens des fonctions de deux variables réelles. On note alors Δu la fonction définie sur U par

$$\Delta u(x+iy) = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2}(x,y).$$

Dans cette partie, on fixe une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ et on se propose de montrer que G_f est l'unique fonction $G : \overline{D} \to \mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a1) la restriction de G à T coïncide avec f ;

(a2) G est continue sur $\overline{D}$;

(a3) la restriction G à D est de classe C^2 et $\Delta G(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On va d'abord montrer que G_f vérifie ces conditions. La condition (a1) est évidemment vérifiée.

1) Montrer que les deux séries qui entrent dans la définition de $g_f(z)$ sont convergentes pour tout $z \in D$.

Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$.

2) Au moyen d'une dérivation terme à terme d'une série de fonctions de variable réelle, justifier que l'application $\widetilde{S} : \widetilde{D} \to \mathbb{C}$ admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue sur $\widetilde{D}$, et exprimer $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x, y)$ sous la forme de la somme d'une série.

3) Montrer que S est de classe C^2 sur D et déterminer $\Delta S(z)$ pour tout $z \in D$.

4) En déduire que g_f est de classe C^2 sur D et que $\Delta g_f(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On fixe $z \in D$, et on note $P_z(t) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5) En tenant compte de la définition des c_n dans l'expression de $g_f(z)$, montrer que

$$g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t)\,\mathrm{d}t.$$

6) Déterminer g_f pour $f = p_n$ et $f = q_n$, où $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de l'intégrale $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,\mathrm{d}t$ et étudier le signe de $P_z(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

7) Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{C}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T, alors G_{f_n} converge uniformément vers G_f sur $\overline{D}$.

8) Soit $\mathscr{P}(T)$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(T)$ engendré par $\{p_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{q_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Justifier que tout élément de $\mathscr{C}(T)$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathscr{P}(T)$, et en déduire que G_f est continue sur $\overline{D}$.

On se donne maintenant une fonction G vérifiant les conditions (a1), (a2) et (a3) et on se propose de démontrer que $G = G_f$.

9) On suppose dans cette question que f est la fonction nulle et que G est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$ et $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ définie par $u(z) = G(z) + \varepsilon |z|^2$.

Montrer que $\Delta u(z) > 0$ pour tout $z \in D$. En déduire que $u(z) \leqslant \varepsilon$ pour tout $z \in \overline{D}$ (on pourra considérer, après en avoir justifié l'existence, un point $z_0 \in \overline{D}$ où u atteint son maximum.)

10) Conclure dans le cas particulier de la question précédente, puis dans le cas général. (On pourra d'abord étendre la conclusion au cas où f est nulle mais G est à valeurs complexes.)

B. Deux applications

Première application. On considère la fonction G définie sur $\overline{D}$ par $G(x + iy) = e^x \cos y$.

11) Montrer que G vérifie la condition (a3) et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t.$$

Deuxième application. Soit $u : U \to \mathbb{C}$ une application continue définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Si $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on note $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - a| < R\}$ et $\overline{D}(a, R) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - a| \leqslant R\}$.

12) Montrer que u est de classe C^2 et telle que $\Delta u = 0$ sur U si et seulement si, pour tout disque fermé $\overline{D}(a, R)$ contenu dans U et pour tout $z \in D(a, R)$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\big(a + Re^{it}\big) P_{\frac{z-a}{R}}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 telle que $\Delta u_n = 0$ sur U.

13) Déduire de la question précédente que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u, alors u est également de classe C^2 et telle que $\Delta u = 0$ sur U.

C. Propriétés duales

Dans cette partie, on fixe $z \in D$ et on considère l'application

$$\varphi_z : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(T) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & g_f(z) \end{array}$$

où $\mathscr{C}(T)$ est muni de la norme N définie par

$$N(f) = \sup_{z \in T} |f(z)|$$

pour tout $f \in \mathscr{C}(T)$. Pour toute application $\varphi : \mathscr{C}(T) \to \mathbb{C}$, on considère les quatre propriétés suivantes :

(c1) φ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire et continue ;

(c2) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(p_n) = z^n$;

(c3) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(q_n) = \bar{z}^n$;

(c4) $\forall f \in \mathscr{C}(T), |\varphi(f)| \leqslant N(f)$.

14) Montrer que φ_z vérifie ces quatre propriétés.

15) Montrer que si φ vérifie les conditions (c1), (c2) et (c3), alors $\varphi = \varphi_z$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $\varphi : \mathscr{C}(T) \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions (c1), (c2) et (c4), et on se propose de démontrer que $\varphi = \varphi_z$.

Dans les deux questions suivantes, on se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ à valeurs réelles $\geqslant 0$. Soit $h \in \mathscr{C}(T)$ définie par la formule $h(z) = 2f(z) - N(f) + i\lambda$ pour tout $z \in T$.

16) Calculer $N(h)^2$ en fonction de $N(f)$ et de λ.

17) En étudiant $|\varphi(h)|^2$, montrer que $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ puis que $\varphi(f) \geqslant 0$.

18) En déduire que $\varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)}$ pour tout $f \in \mathscr{C}(T)$, et conclure.

FIN DU PROBLÈME