SESSION 2010

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE EPREUVE. FILIÈRE MP

A. Prolongement harmonique

1) Soit $z \in D$. Donc $|z| < 1$. Puisque f est continue sur T, la fonction $t \mapsto f(e^{it})$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On sait alors que $c_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et $c_{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. On en déduit que $|c_n z^n| \underset{n\to+\infty}{=} o(|z|^n)$ et $|c_{-n}\overline{z}^n| \underset{n\to+\infty}{=} o(|z|^n)$ puis que les séries de termes généraux respectifs $c_n z^n$ et $c_{-n}\overline{z}^n$ sont absolument convergentes et donc convergentes.

2) Notons $R_a \geqslant 1$ le rayon de convergence de la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soient $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ puis $r \in \left]\sqrt{x_0^2+y_0^2}, 1\right[$. Alors $R_a^2 > r^2 > y_0^2$.

Pour $x \in I = \left]-\sqrt{r^2-y_0^2}, \sqrt{r^2-y_0^2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = a_n(x+iy_0)^n$. On note que $x_0^2+y_0^2 < r^2$ et donc $x_0 \in \left]-\sqrt{r^2-y_0^2}, \sqrt{r^2-y_0^2}\right[$.

- La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \widetilde{S}(x, y_0)$.
- Chaque fonction f_n est de classe C^1 sur I.
- Pour $x \in I$, $f_0'(x) = 0$ puis pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n'(x)| = |na_n(x+iy_0)^{n-1}| = |na_n|\sqrt{x^2+y_0^2}^{\,n-1} \leqslant |na_n|r^{n-1}$.
  Puisque $0 \leqslant r < R_a$, la série numérique de terme général $|na_n|r^{n-1}$ converge. On en déduit que la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement et donc uniformément sur I.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $x \mapsto S(x, y_0)$ est dérivable sur I et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. En particulier, la fonction $x \mapsto S(x, y_0)$ est dérivable en x_0 ou encore la fonction $\widetilde{S}$ admet en une dérivée partielle par rapport à sa première variable x en (x_0, y_0). Finalement, $\widetilde{S}$ admet sur $\widetilde{D}$ une dérivée partielle par rapport à x et

$$\forall (x,y) \in \widetilde{D},\ \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1} = S'(x+iy)$$

où S' désigne la série entière $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$. On rappelle alors que la série entière $\sum na_n z^{n-1}$ a encore pour rayon de convergence R_a.

Maintenant, la fonction $\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}$ est la composée de la fonction $(x,y) \mapsto x+iy$ qui est continue sur $\widetilde{D}$ en tant qu'application linéaire sur un espace de dimension finie et de la fonction $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ qui est continue sur le disque ouvert de centre O et de rayon R_a et en particulier sur D. Donc la fonction $\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}$ est continue sur $\widetilde{D}$.

3) De même, $\widetilde{S}$ admet sur $\widetilde{D}$ une dérivée partielle par rapport à y et

$$\forall (x,y) \in \widetilde{D},\ \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(x,y) = i\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1} = iS'(x+iy).$$

De plus, $\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}$ est continue sur $\widetilde{D}$ et donc la fonction $\widetilde{S}$ est de classe C^1 sur D. Puisque les séries entières considérées ont encore pour rayon de convergence R_a, on peut réitérer. la fonction $\widetilde{S}$ est de classe C^2 sur $\widetilde{D}$ ou encore S est de classe C^2 sur D et pour $z = x+iy \in D$

$$\Delta S(z) = \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}(x,y) + = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} + i^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} = 0.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

4) Pour $|z| < 1$, posons $S_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ et $S_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^n$ de sorte que $g_f(z) = c_0 + S_1(z) + S_2(\overline{z})$. On sait déjà que les fonctions S_1 et S_2 sont de classe C_2 sur D. Notons alors c la fonction $c\ :\ z \mapsto \overline{z}$ de sorte que $\widetilde{c}$ est la fonction $(x, y) \mapsto (x, -y)$. La fonction $\widetilde{c}$ est de classe C^2 sur D à valeurs dans D et il en est de même de la fonction $(x, y) \mapsto \widetilde{S}_2 \circ \varphi(x, y)$. De plus, pour $(x, y) \in \widetilde{D}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{S}_2(x, -y)) = \frac{\partial \widetilde{S}_2}{\partial x}(x, -y) \text{ puis } \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\widetilde{S}_2(x, -y)) = \frac{\partial^2 \widetilde{S}_2}{\partial x^2}(x, -y).$$

De même, $\frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{S}_2(x, -y)) = -\frac{\partial \widetilde{S}_2}{\partial x}(x, -y)$ puis $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\widetilde{S}_2(x, -y)) = \frac{\partial^2 \widetilde{S}_2}{\partial y^2}(x, -y)$ et finalement

$$\Delta(\widetilde{S}_2(x, -y)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\widetilde{S}_2(x, -y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\widetilde{S}_2(x, -y)) = 0.$$

La fonction g_f est donc de classe C^2 et de Laplacien nul sur D en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe C^2 et de Laplacien nul sur D.

$$\boxed{g_f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } D \text{ et } \forall z \in D,\ \Delta g_f(z) = 0.}$$

5) Soit $z \in D$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, posons $g_n(t) = f(e^{it})e^{int}z^n = f(e^{it})(ze^{it})^n$. Chaque fonction f_n est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [-\pi, \pi]$, $|f(e^{it})(ze^{it})^n| \leqslant \|f\|_\infty |z|^n$ qui est le terme général d'une série numérique convergente. Donc la série de fonctions de terme général g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$. De même la série de fonctions de terme général $t \mapsto f(e^{it})e^{-int}\overline{z}^n$ converge uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$\begin{aligned}
g_f(z) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{z}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{int}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} f(e^{it}) \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (ze^{-it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (\overline{ze^{-it}})^n\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left(1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (ze^{-it})^n\right)\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left(1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{ze^{-it}}{1 - ze^{-it}}\right)\right) dt \text{ (car } \forall t \in [-\pi, \pi],\ |ze^{-it}| = |z| < 1) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left(\mathrm{Re}\left(1 + 2\frac{ze^{-it}}{e^{-it}(e^{it} - z)}\right)\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left(\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right)\right) dt.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall z \in D,\ g_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)\,dt \text{ où } P_z(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right).}$$

6) Pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-ipt}\,dt = \delta_{n,p}$. Soient alors $z \in D$ et $n \in \mathbb{N}$.

• Si $f = p_n$ alors, pour $p \in \mathbb{Z}$, $c_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-ipt}\,dt = \delta_{n,p}$ puis, $g_f(z) = \delta_{p,0} + \sum_{p=1}^{+\infty} \delta_{p,n} z^p + \sum_{p=1}^{+\infty} \delta_{p,-n}(f)\overline{z}^p = z^n = p_n(z)$.

• Si $f = q_n$, $c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-n-p)t}\,dt = \delta_{p,-n}$ puis pour $z \in D$, $g_f(z) = \overline{z}^n = q_n(z)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in D,\ g_{p_n}(z) = z^n \text{ et } g_{q_n}(z) = \overline{z}^n.}$$

En particulier, si $f = p_0 = 1$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,dt = 1.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $z \in D$,

$$P_z(t) = \text{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \text{Re}\left(\frac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\overline{z})}{(e^{it}-z)(e^{-it}-\overline{z})}\right) = \text{Re}\left(\frac{1+2i\text{Im}(ze^{-it})-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} > 0.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in D, \text{ la fonction } P_z \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}.}$$

7) Soit $f \in \mathscr{T}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T.

Soit $z_0 \in \overline{D}$.

- Si $z_0 \in D$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}|G_f(z_0) - G_{f_n}(z_0)| = |g_f(z_0) - g_{f_n}(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(e^{it}) - f_n(e^{it}))P_{z_0}(t)\ dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{it}) - f_n(e^{it})|P_{z_0}(t)\ dt \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{z_0}(t)\ dt\right)\sup\{|f(e^{it}) - f_n(e^{it})|,\ t \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f(z) - f_n(z)|,\ z \in T\},\end{aligned}$$

- Si $z_0 \in T$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|G_f(z_0) - G_{f_n}(z_0)| = |f(z_0) - f_n(z_0)| \leqslant \sup\{|f(z) - f_n(z)|,\ z \in T\}$.

En résumé, $\forall z_0 \in \overline{D}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|G_f(z_0) - G_{f_n}(z_0)| \leqslant \sup\{|f(z) - f_n(z)|,\ z \in T\}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\{|G_f(z) - G_{f_n}(z)|,\ z \in T\} \leqslant \sup\{|f(z) - f_n(z)|,\ z \in T\}$. On en déduit que $\sup\{|G_f(z) - G_{f_n}(z)|,\ z \in T\}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc que la suite de fonctions $(G_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction G_f sur $\overline{D}$.

8) La fonction $h\ :\ t \mapsto f(e^{it})$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers la fonction h sur $\mathbb{R}$ ou encore il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}(T)$ telle que la suite de fonctions $h_n\ :\ t \mapsto P_n(e^{it})$ converge uniformément vers la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\{|P_n(z) - f(z),\ z \in T\} = \sup\{|h_n(t) - h(t),\ t \in \mathbb{R}\}$, on en déduit que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}(T)$ converge uniformément vers f sur T.

Maintenant, si pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall z \in T$, $P_n(z) = c_{0,n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{d_n}(c_{k,n}z^k + c_{-k,n}\overline{z}^k)$, alors d'après la question 6 et par linéarité de l'application $g \mapsto g_f$, on a encore $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \overline{D}$, $P_n(z) = c_{0,n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{d_n}(c_{k,n}z^k + c_{-k,n}\overline{z}^k)$. On en déduit que chaque G_{P_n} est continue sur $\overline{D}$ et puisque la suite $(G_{P_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction G_f sur $\overline{D}$ d'après la question 7, la fonction G_f est continue sur $\overline{D}$.

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{C}(T), \text{ la fonction } G_f \text{ est continue sur } \overline{D}.}$$

9) u est de classe C^2 sur D et pour $z = x + iy \in D$,

$$\Delta u(z) = \Delta G(z) + \varepsilon\Delta(|z|^2) = 0 + \varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2)\right) = 4\varepsilon > 0.$$

Maintenant, la fonction u est continue sur le compact $\overline{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et donc u admet un maximum en un certain $z_0 \in \overline{D}$. Montrons que $z_0 \in T$. Supposons par l'absurde que $z_0 \notin T$. Alors $z_0 = x_0 + iy_0$ est dans l'ouvert D. On en déduit que l'application partielle $x \mapsto \widetilde{u}(x, y_0)$ est définie et de classe C^2 sur un intervalle ouvert de centre x_0 et admet un maximum en x_0. On sait alors que sa dérivée première en x_0 à savoir $\dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}(x_0, y_0)$ est nulle et un développement limité à l'ordre 2 en x_0 s'écrit

$$u(x, y_0) \underset{x\to x_0}{=} u(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Puisque localement on a $u(x, y_0) - u(x_0, y_0) \leqslant 0$ et que d'autre part le signe de $u(x, y_0) - u(x_0, y_0)$ est localement le signe de $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2$, on en déduit que $\dfrac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leqslant 0$. De même, l'analyse de la deuxième application partielle en (x_0, y_0) fournit $\dfrac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leqslant 0$.
En résumé, si $z_0 \notin T$, on a $\Delta u(z_0) \leqslant 0$ ce qui contredit $\forall z \in \overline{D}$, $\Delta u(z) > 0$. Donc $z_0 \in T$ puis $G(z_0) = f(z_0) = 0$ et pour $z \in \overline{D}$,

$$u(z) \leqslant u(z_0) = G(z_0) + \varepsilon|z_0|^2 = \varepsilon$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall z \in \overline{D}$, $u(z) \leqslant \varepsilon$.

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

10) Supposons tout d'abord f nulle sur T et G à valeurs réelles. D'après la question précédente, $\forall z \in \overline{D}$, $G(z) + \varepsilon|z|^2 \leqslant \varepsilon$. Quand ε tend vers 0 à z fixé, on obtient

$$\forall z \in \overline{D},\ G(z) \leqslant 0.$$

Mais la fonction $-G$ vérifie également les hypothèses (a_1), (car f est nulle sur T) (a_2) et (a_3) et on a donc aussi $\forall z \in \overline{D}$, $-G(z) \leqslant 0$. On en déduit que $\forall z \in \overline{D}$, $G(z) = 0$ ou encore $G = 0 = G_f$.

Si maintenant f est nulle sur T et G à valeurs complexes, les fonctions $\mathrm{Re}(G)$ et $\mathrm{Im}(G)$ sont à valeurs réelles et vérifient (a_1), (car f est nulle sur T) (a_2) et (a_3) (car $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re})$). On en déduit que $\mathrm{Re}(G) = \mathrm{Im}(G) = 0$ puis que $G = 0$.

Si enfin f est quelconque, la fonction $G - G_f$ vérifie les propriétés (a_1), (a_2) et (a_3) pour la fonction nulle. On en déduit que $G - G_f$ est nulle et donc que $G = G_f$.

B. Deux applications

Première application.

11) G est de classe C^2 sur D et pour $(x, y) \in \widetilde{D}$

$$\Delta G(x + iy) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + \frac{\partial}{\partial y}(-e^x \sin y) = e^x \cos y - e^x \cos y.$$

Pour $z \in T$, posons alors $f(z) = e^{(z+\overline{z})/2} \cos\left(\dfrac{z - \overline{z}}{2i}\right)$. La fonction f est continue sur T et la fonction G vérifie les propriétés (a_1), (a_2) et (a_3). D'après la question 10), $G = G_f$ et donc, pour $z \in D$,

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\overline{z}^n = e^{(z+\overline{z})/2} \cos\left(\frac{z - \overline{z}}{2i}\right).$$

Or, pour $n \in \mathbb{Z}$, par parité, on obtient

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)(\cos(nt) - i\sin(nt))\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos(nt)\ dt = c_{-n}. \end{aligned}$$

Par suite, $\forall z \in D$, $c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z^n + \overline{z}^n) = e^{(z+\overline{z})/2)} \cos\left(\dfrac{z - \overline{z}}{2i}\right)$. En particulier, pour $z = x \in]-1, 1[$,

$$c_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, en identifiant on obtient $c_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $c_n = \dfrac{1}{2n!}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos(nt)\ dt = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{1}{2(|n|!)} \text{ si } n \neq 0 \end{cases}.}$$

Deuxième application.

12) • Supposons que u soit de classe C^2 et de Laplacien nul sur U. Soit $\overline{D}(a, R)$ un disque fermé contenu dans U puis $z \in D(a, R)$. Posons $Z = \dfrac{z - a}{R}$. Alors, $Z \in D$ et $z = a + RZ$.

Pour $z' \in \overline{D}$, posons $f(z') = u(a + Rz')$. L'application $z' \mapsto a + Rz'$ est de classe C^2 sur $\overline{D}$ à valeurs dans $\overline{D}(a, R)$ et u est de classe C^2 sur $\overline{D}(a, R)$. Donc f est de classe C^2 sur $\overline{D}$. De plus, avec des notations évidentes

$$\begin{aligned} \Delta f(z') = \Delta\widetilde{f}(x', y') = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}(\widetilde{u}(a_1 + Rx', a_2 + R_2 y')) + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}(\widetilde{u}(a_1 + Rx', a_2 + R_2 y')) = \\ R^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}(a_1 + Rx', a_2 + R_2 y') + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}(a_1 + Rx', a_2 + R_2 y')\right) = R^2\Delta u(z) = 0. \end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

La fonction f vérifie donc

- la fonction de f à T coïncide avec f (a_1)
- f est continue sur $\overline{D}$ (a_2)
- la restriction de f à D est de classe C^2 et de classe $\Delta f(z') = 0$ pour tout $z' \in D$ (a_3).

Par unicité de G_f, on en déduit que $G_f = f$ et donc que

$$u(z) = f(Z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_Z(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt.$$

• Réciproquement, supposons que pour tout disque fermé $\overline{D}(a,R)$ contenu dans U et pour tout $z \in D(a,R)$, on ait $u(z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt$. Pour $z' \in \overline{D}$, posons $f(z') = u(a+Rz')$ et $z = a+Rz'$. f est continue sur $\overline{D}$ et en particulier sur T. De plus, pour $z' \in D$,

$$g_f(z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_{z'}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt = u(z).$$

Donc pour tout $z \in D$, $u(z) = g_f\left(\frac{z-a}{R}\right)$. D'après la question 4), g_f est de classe C^2 sur D et $\Delta g_f = 0$ sur D. Par composition u est de classe C^2 sur $D(a,R)$ et $\Delta u = \frac{1}{R^2}\Delta g_f = 0$ sur $D(a,R)$. Comme pour chaque $a \in U$ il existe $R > 0$ tel que $D(a,R) \subset U$, u est de classe C^2 sur U et $\forall z \in U$, $\Delta u(z) = 0$.

13) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^2 et de Laplacien nul sur U convergeant uniformément vers une fonction u sur U. Soit $a \in U$ puis $R > 0$ tel que $\overline{D}(a,R) \subset U$.

Soit $z \in D(a,R)$. Alors $\frac{z-a}{R} \in D$ et la fonction $P_{\frac{z-a}{R}}$ est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$ et donc bornée sur ce segment. Soit $M = \sup\left\{\left|P_{\frac{z-a}{R}}(t)\right|,\ t \in [-\pi,\pi]\right\}$.
Pour $t \in [-\pi,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n(t) = u_n(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)$ puis $v(t) = u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-\pi,\pi]$,

$$|v_n(t)-v(t)| = |u_n(a+Re^{it}) - u(a+Re^{it})|P_{\frac{z-a}{R}}(t) \leqslant M\sup\{|u_n(z)-u(z),\ z \in U\},$$

et donc $\sup\{|v_n(t)-v(t)|,\ t \in [-\pi,\pi]\} \leqslant M\,\sup\{|u_n(z)-u(z)|,\ z \in U\} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. La suite de fonctions $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction v sur le segment $[-\pi,\pi]$. On en déduit que

$$\begin{aligned} u(z) &= \lim_{n\to+\infty} u_n(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{n\to+\infty} u_n(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout disque fermé $\overline{D}(a,R)$ contenu dans U et pour tout $z \in D(a,R)$, on a $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt$.
D'après la question précédente, u est de classe C^2 sur U et $\Delta u = 0$ sur U.

C. Propriétés duales

14) φ_z vérifie (c_2) et (c_3) d'après la question 6). φ_z est une forme $\mathbb{C}$-linéaire par $\mathbb{C}$-linéarité des coefficients de FOURIER c_n. De plus, pour $f \in \mathscr{C}(T)$,

$$\begin{aligned} |\varphi_z(f)| = |g_f(z)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|P_z(t)\,dt \ (\forall t \in\ [-\pi,\pi],\ P_z(t) > 0 \text{ d'après 6)}) \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,dt\right)N(f) = N(f) \text{ (d'après 6))}. \end{aligned}$$

et φ_z vérifie (c_4). De plus, puisque φ_z est linéaire et que $\sup\left\{\frac{|\varphi_z(f)|}{N(f)},\ f \in \mathscr{C}(T)\setminus\{0\}\right\} \leqslant 1 < +\infty$, φ_z est une forme $\mathbb{C}$-linéaire continue. φ_z vérifie donc (c_1).

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

15) Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{C}(\mathsf{T})$ vérifiant (c_1), (c_2) et (c_3). Alors par $\mathbb{C}$-linéarité de φ et d'après la question 6), les restrictions de φ et φ_z à $\mathscr{P}(\mathsf{T})$ sont égales. Mais d'après la question 8), $\mathscr{P}(\mathsf{T})$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}(\mathsf{T}), \mathsf{N})$. Puisque φ et φ_z sont continues sur l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}(\mathsf{T}), \mathsf{N})$, on sait que $\varphi = \varphi_z$.

16) f est continue sur le compact T à valeurs réelles positives. Donc il existe $z_0 \in \mathsf{T}$ tel que $f(z_0) = \mathsf{N}(f)$.
Puisque f est continue sur T à valeurs réelles, h est continue sur T et pour tout $z \in \mathsf{T}$, $|h(z)|^2 = (2f(z) - \mathsf{N}(f))^2 + \lambda^2$. Ensuite, pour tout $z \in \mathsf{T}$, $0 \leqslant f(z) \leqslant \mathsf{N}(f)$ et donc $-\mathsf{N}(f) \leqslant 2f(z) - \mathsf{N}(f) \leqslant \mathsf{N}(f)$ puis $|h(z)|^2 \leqslant \mathsf{N}(f)^2 + \lambda^2$ avec égalité effectivement obtenue quand $z = z_0$. Donc $(\sup\{|h(z)|,\ z \in \mathsf{T}\})^2 = \sup\{|h(z)|^2,\ z \in \mathsf{T}\} = \mathsf{N}(f)^2 + \lambda^2$. On a montré que

$$\boxed{\mathsf{N}(h)^2 = \mathsf{N}(f)^2 + \lambda^2.}$$

17) Ainsi, d'après (c_4), $|\varphi(h)|^2 \leqslant \mathsf{N}(h)^2 = \mathsf{N}(f)^2 + \lambda^2$. Mais d'après (c_1) et (c_2),

$$\varphi(h) = \varphi(2f + (-\mathsf{N}(f) + i\lambda)p_0) = 2\varphi(f) + (-\mathsf{N}(f) + i\lambda)\varphi(p_0) = 2\varphi(f) - \mathsf{N}(f) + i\lambda.$$

Par suite, pour tout réel λ, $|2\varphi(f) - \mathsf{N}(f) + i\lambda|^2 \leqslant \mathsf{N}(f)^2 + \lambda^2$ ou encore pour tout réel λ,

$$\mathsf{N}(f)^2 + \lambda^2 \geqslant (2\mathrm{Re}(\varphi(f)) - \mathsf{N}(f))^2 + (2\mathrm{Im}(\varphi(f)) + \lambda)^2 = \lambda^2 + 4\lambda\mathrm{Im}(\varphi(f)) + \mathsf{N}(f)^2 - 4\mathrm{Re}(\varphi(f))\mathsf{N}(f) + 4(\mathrm{Re}(\varphi(f)))^2$$

et finalement

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\mathrm{Im}\,(\varphi(f)) - \mathrm{Re}(\varphi(f))(\mathsf{N}(f) - \mathrm{Re}(\varphi(f))) \geqslant 0.$$

Puisque la fonction affine $\lambda \mapsto \lambda\mathrm{Im}\,(\varphi(f)) - \mathrm{Re}(\varphi(f))(\mathsf{N}(f) - \mathrm{Re}(\varphi(f)))$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(\varphi(f)) = 0$ et donc que $\varphi(f) \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathrm{Re}(\varphi(f)) = \varphi(f)$, il reste alors

$$\varphi(f)(\mathsf{N}(f) - \varphi(f)) \geqslant 0$$

et donc, ou bien $\varphi(f) = \mathsf{N}(f)$ et dans ce cas, $\varphi(f) \geqslant 0$, ou bien $\varphi(f) < \mathsf{N}(f)$ (d'après (c_4) et donc $\mathsf{N}(f) - \varphi(f) > 0$ puis de nouveau $\varphi(f) \geqslant 0$ après simplification.

En résumé, l'image par φ de tout élément de $\mathscr{C}(\mathsf{T})$ à valeurs réelles positives est un réel positif.

18) Soit f un élément de $\mathscr{C}(\mathsf{T})$ à valeurs réelles. On pose $f^+ = \mathrm{Max}\{f, 0\}$ et $f^- = \mathrm{Max}\{-f, 0\}$ de sorte que f^+ et f^- sont deux éléments de $\mathscr{C}(\mathsf{T})$ (car $f^+ = \dfrac{1}{2}(|f| - f)$ et $f^- = \dfrac{1}{2}(|f| - f^-)$) à valeurs réelles positives tels que $f = f^+ - f^-$. Par $\mathbb{C}$-linéarité, on en déduit que $\varphi(f) = \varphi(f^+) - \varphi(f^-) \in \mathbb{R}$ (on peut aussi écrire $\varphi(f) = \varphi(f + \mathsf{N}(f) - \mathsf{N}(f)) = \varphi(f + \mathsf{N}(f)) - \mathsf{N}(f) \in \mathbb{R}$ car $f + \mathsf{N}(f)$ est à valeurs réelles positives). Puis si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$

$$\varphi(\overline{f}) = \varphi(\mathrm{Re}(f) - i\mathrm{Im}(f)) = \varphi(\mathrm{Re}(f) - i\varphi(\mathrm{Im}(f)) = \overline{\varphi(\mathrm{Re}(f) + i\varphi(\mathrm{Im}(f))} = \overline{\varphi(f)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\varphi(q_n) = \varphi(\overline{p_n}) = \overline{\varphi(p_n)} = \overline{p_n} = q_n$ et donc φ vérifie (c_3).

Enfin, puisque φ vérifie (c_1), (c_2) et (c_3), on en déduit que $\varphi = \varphi_z$.

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.