SESSION 2009

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIEME EPREUVE. FILIERE PSI

I Polynômes d'Hermite

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $h_0(x) = 1$ et $h_1(x) = -\dfrac{1}{2}e^{x^2} \times (-2xe^{-x^2}) = x$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n'(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}2xe^{x^2}D^n(e^{-x^2}) + \frac{(-1)^n}{2^n}e^{x^2}D^{n+1}(e^{-x^2}) = 2xh_n(x) - 2h_{n+1}(x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h_0(x) = 1,\ h_1(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ 2h_{n+1}(x) - 2xh_n(x) + h_n'(x) = 0.}$$

2) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, h_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.
• C'est vrai pour $n = 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que h_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1. Alors $h_{n+1} = Xh_n - \dfrac{1}{2}h_n'$ est un polynôme puis $\deg(h_{n+1} = \deg(Xh_n) = n + 1$ et $\text{dom}(h_{n+1}) = \text{dom}(Xh_n) = \text{dom}(h_n) = 1$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ h_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 1.}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puis f_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_x(t) = f(x - t)$. f_x est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g^{(n)}(t) = (-1)^n f^{(n)}(x - t)$ et en particulier, $\forall n/in\mathbb{N}$, $f_x^{(n)}(0) = (-1)^n f^{(n)}(x)$.
On applique ce résultat à la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ de sorte que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_x(t) = e^{-(x-t)^2}$. On obtient pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_x^{(n)}(0) = (-1)^n D^n(e^{-t^2})(x) = 2^n e^{-x^2} h_n(x).$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_x(t) = e^{-x^2}e^{2tx}e^{-t^2}$. Par suite, la fonction f_x est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus, , d'après la question précédente, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_x^{(k)}}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^k h_k(x)e^{-x^2}.$$

$$\boxed{\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ e^{-(x-t)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^k h_k(x)e^{-x^2}.}$$

5) Pour $(x, t) \in \mathbb{R}$, $w(x, t) = e^{x^2} f_x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^k h_k(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que la série entière de somme $w(x, t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - (2x - 2t)w(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}2^k h_k(x) - (2x - 2t)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^k h_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^{k+1}h_{k+1}(x) - x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^{k+1}h_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{(k-1)!}2^k h_{k-1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}2^k(2h_{k+1}(x) - 2xh_k(x) + kh_{k-1}(x)) \text{ (avec la convention } h_{-1}(x) = 0).
\end{aligned}$$

L'unicité d'un développement en série entière et l'identité (3) permettent alors d'affirmer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $2h_{k+1}(x) - 2xh_k(x) + kh_{k-1}(x) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 2h_{k+1}(x) - 2xh_k(x) + kh_{k-1}(x) = 0 \text{ avec la convention } \forall x \in \mathbb{R},\ h_{-1}(x) = 0.}$$

6) L'identité (1) et l'identité (3) donnent

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ h'_n = nh_{n-1}.}$$

7) D'après la question 4), pour tout réel t,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k h_k(0)}{k!} t^k = f_0(t) = e^{-t^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} t^{2p}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, pour $p \in \mathbb{N}$, on a $h_{2p+1}(0) = 0$ puis $\dfrac{2^{2p} h_{2p}(0)}{(2p)!} = \dfrac{(-1)^p}{p!}$ et donc $h_{2p}(0) = \dfrac{(-1)^p (2p)!}{2^{2p} p!}$.

On en déduit que pour $p \in \mathbb{N}$, $\phi_{2p+1}(0) = 0$ puis

$$\phi_{2p}(0) = \frac{1}{\left(\sqrt{\pi}(2p)!2^{-2p}\right)^{1/2}} \times \frac{(-1)^p (2p)!}{2^{2p} p!} = \frac{(-1)^p \sqrt{(2p)!}}{\pi^{1/4} 2^p p!}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \phi_{2p}(0) = \frac{(-1)^p \sqrt{(2p)!}}{\pi^{1/4} 2^p p!} \text{ et } \phi_{2p+1}(0) = 0.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi'_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{d_n}}(-2xh_n(x) + h'_n(x))e^{-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{d_n}}(-2xh_n(x) + nh_{n-1}(x))e^{-x^2}$ (on rappelle la convention $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_{-1}(x) = 0$). Pour $x = 0$, on obtient

$$\phi'_n(0) = \frac{1}{\sqrt{d_n}} \times nh_{n-1}(0) = n\sqrt{\frac{d_{n-1}}{d_n}} \phi_{n-1}(0) = \sqrt{2n}\ \phi_{n-1}(0).$$

Donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \phi'_{2p}(0) = 0 \text{ et } \phi'_{2p+1}(0) = \sqrt{2(2p+1)} \frac{(-1)^p \sqrt{(2p)!}}{\pi^{1/4} 2^p p!}.}$$

8) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}$. La relation (4) fournit

$$\begin{aligned}
(x - y)h_k(x)h_k(y) &= xh_k(x)h_k(y) - yh_k(x)h_k(y) \\
&= \left(h_{k+1}(x) + \frac{k}{2}h_{k-1}(x)\right) h_k(y) - \left(h_{k+1}(y) + \frac{k}{2}h_{k-1}(y)\right) h_k(x) \\
&= (h_{k+1}(x)h_k(y) - h_{k+1}(y)h_k(x)) - \frac{k}{2}(h_k(x)h_{k-1}(y) - h_k(y)h_{k-1}(x)).
\end{aligned}$$

9) Puis,

$$\begin{aligned}
(x - y)\frac{1}{d_k}h_k(x)h_k(y) &= \frac{1}{d_k}(h_{k+1}(x)h_k(y) - h_{k+1}(y)h_k(x)) - \frac{k}{2d_k}(h_k(x)h_{k-1}(y) - h_k(y)h_{k-1}(x)) \\
&= \frac{1}{d_k}(h_{k+1}(x)h_k(y) - h_{k+1}(y)h_k(x)) - \frac{1}{d_{k-1}}(h_k(x)h_{k-1}(y) - h_k(y)h_{k-1}(x)),
\end{aligned}$$

et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par télescopage (en posant conventionnellement $d_{-1} = 1$)

$$\begin{aligned}
(x - y)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{d_k}h_k(x)h_k(y) &= \frac{1}{d_{n-1}}(h_n(x)h_{n-1}(y) - h_n(y)h_{n-1}(x)) - \frac{1}{d_{-1}}(h_0(x)h_{-1}(y) - h_0(y)h_{-1}(x)) \\
&= \frac{1}{d_{n-1}}(h_n(x)h_{n-1}(y) - h_n(y)h_{n-1}(x)).
\end{aligned}$$

Si de plus, x et y sont distincts

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\phi_k(x)\phi_k(y) &= e^{-x^2}e^{-y^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{d_k}h_k(x)h_k(y)\\ &= \frac{e^{-x^2}e^{-y^2}}{d_{n-1}}\times\frac{h_n(x)h_{n-1}(y)-h_n(y)h_{n-1}(x)}{x-y}\\ &= \frac{\sqrt{d_{n-1}}\sqrt{d_n}}{d_{n-1}}\times\frac{\phi_n(x)\phi_{n-1}(y)-\phi_n(y)\phi_{n-1}(x)}{x-y}\\ &= \sqrt{\frac{n}{2}}\times\frac{\phi_n(x)\phi_{n-1}(y)-\phi_n(y)\phi_{n-1}(x)}{x-y}\end{aligned}$$

II Etude de Φ_{2m}

10) L'équation différentielle proposée est du type $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$ où a, b et c sont trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de CAUCHY, le problème de CAUCHY $(S(r,\beta,\gamma))$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée $\rho''(x)+\gamma^2\rho(x)=0$ sont les fonction des la forme $x\mapsto\lambda_1\rho_1(x)+\lambda_2\rho_2(x)$ où $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ et ρ_1 et ρ_2 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}$, $\rho_1(x)=\cos(\gamma x)$ et $\rho_2(x)=\sin(\gamma x)$.

Une solution particulière de l'équation $\rho''(x)+\gamma^2\rho(x)=r(x)$ est fournie par la méthode de variation des constantes : il existe une solution particulière de l'équation de la forme $x\mapsto\lambda_1(x)\rho_1(x)+\lambda_2(x)\rho_2(x)$ où λ_1 et λ_2 sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et solution du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda_1'\rho_1+\lambda_2'\rho_2=0\\ \lambda_1'\rho_1'+\lambda_2'\rho_2'=r\end{array}\right.$. On a $\begin{vmatrix}\rho_1(x) & \rho_2(x)\\ \rho_1'(x) & \rho_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos(\gamma x) & \sin(\gamma x)\\ -\gamma\sin(\gamma x) & \gamma\cos(\gamma x)\end{vmatrix}=\gamma$ et les formules de CRAMER fournissent pour $x\in\mathbb{R}$

$$\lambda_1'(x)=\frac{1}{\gamma}\begin{vmatrix}0 & \sin(\gamma x)\\ r(x) & \gamma\cos(\gamma x)\end{vmatrix}=-\frac{1}{\gamma}r(x)\sin(\gamma x)\text{ et }\lambda_2'(x)=\frac{1}{\gamma}\begin{vmatrix}\cos(\gamma x) & 0\\ -\gamma\sin(\gamma x) & r(x)\end{vmatrix}=\frac{1}{\gamma}r(x)\cos(\gamma x).$$

On peut prendre $\lambda_1(x)=-\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int_0^x r(t)\sin(\gamma t)\,dt$ et $\lambda_2(t)=\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int_0^x r(t)\cos(\gamma t)\,dt$. Une solution particulière de l'équation proposée est donc

$$\rho(x)=-\frac{1}{\gamma}\cos(\gamma x)\int_0^x r(t)\sin(\gamma t)\,dt+\frac{1}{\gamma}\sin(\gamma x)\int_0^x r(t)\cos(\gamma t)\,dt=\frac{1}{\gamma}\int_0^x r(t)\sin(\gamma(x-t))\,dt.$$

La solution générale de l'équation proposée est $x\mapsto\lambda_1\cos(\gamma x)+\lambda_2\sin(\gamma x)+\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int_0^x r(t)\sin(\gamma(x-t))\,dt$, $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$.

La condition $\rho(0)=\beta$ fournit $\lambda_1=\beta$. Ensuite, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\rho'(x)=-\lambda_1\sin(\gamma x)+\lambda_2\cos(\gamma x)+$$
$$\frac{1}{\gamma}\left(\gamma\sin(\gamma x)\int_0^x r(t)\sin(\gamma t)\,dt-\cos(\gamma x)r(x)\cos(\gamma x)+\gamma\cos(\gamma x)\int_0^x r(t)\cos(\gamma t)\,dt+\sin(\gamma x)r(x)\sin(\gamma x)\right),$$

et la condition $\rho'(0)=0$ fournit $\lambda_2=0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La solution sur }\mathbb{R}\text{ du problème de CAUCHY }(S(r,\beta,\gamma))\text{ est la fonction }\rho_0\text{ définie sur }\mathbb{R}\text{ par :}\\ \forall x\in\mathbb{R},\ \rho_0(x)=\beta\cos(\gamma x)+\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int_0^x r(t)\sin\left(\gamma(x-t)\right)\,dt.\end{array}}$$

11) Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $r(x)=x^2\phi_{2m}(x)$. D'après le résultat admis ci-dessus, ϕ_{2m} est solution de $(S(r,\phi_{2m}(0),\phi_{2m}'(0))$ ou encore du problème $(S(r,\alpha_{2m},0)$ où $\alpha_{2m}=\dfrac{(-1)^m}{\pi^{1/4}}\dfrac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!}$ d'après la question 7) et $\gamma=\sqrt{4m+1}$.
D'après la question précédente, on a donc

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \phi_{2m}(x)=\alpha_{2m}\cos(\sqrt{4m+1}x)+\frac{1}{\sqrt{4m+1}}\int_0^x\frac{\sin\left(\sqrt{4m+1}(x-y)\right)}{\sqrt{4m+1}}y^2\phi_{2m}(y)\,dy\text{ où }\alpha_{2m}=\frac{(-1)^m}{\pi^{1/4}}\frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!}.}$$

12) D'après la formule de STIRLING

$$\alpha_{2m} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^m}{\pi^{1/4}} \frac{\sqrt{\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}\sqrt{4\pi m}}}{2^m\left(\frac{m}{e}\right)^m\sqrt{2\pi m}} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}m^{1/4}}$$

$$\boxed{\alpha_{2m} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}m^{1/4}}.}$$

13) Soient $x \in \mathbb{R}$ puis $I = [0, x]$ si $x \geqslant 0$ et $[x, 0]$ si $x \leqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \frac{\sin\left(\sqrt{4m+1}(x-y)\right)}{\sqrt{4m+1}} y^2\phi_{2m}(y)\,dy\right| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\int_I y^2|\phi_{2m}(y)|\,dy \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\sqrt{\int_I y^4\,dy} \times \sqrt{\int_I \phi_{2m}^2(y)\,dy} \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\sqrt{\int_I y^4\,dy} \times \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \phi_{2m}^2(y)\,dy} = \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\sqrt{\int_I y^4\,dy} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\sqrt{\frac{|x|^5}{5}} = \frac{1}{\sqrt{4m+1}}\frac{|x|^{5/2}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

14) D'après la question 11), pour tout réel x,

$$(-1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\phi_{2m}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}\right) =$$

$$(-1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\alpha_{2m}\cos\left(\frac{x\sqrt{4m+1}}{2\sqrt{m}}\right) + (-1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\frac{1}{\sqrt{4m+1}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{m}}} \frac{\sin\left(\sqrt{4m+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}-y\right)\right)}{\sqrt{4m+1}} y^2\phi_{2m}(y)\,dy$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 12), on a $\lim\limits_{m\to+\infty}(-1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\alpha_{2m}\cos\left(\frac{x\sqrt{4m+1}}{2\sqrt{m}}\right) = \cos x$ (car $\frac{\sqrt{4m+1}}{2\sqrt{m}} \underset{m\to+\infty}{\sim} 1$). D'autre part,

$$\left|(-1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{m}}} \frac{\sin\left(\sqrt{4m+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}-y\right)\right)}{\sqrt{4m+1}} y^2\phi_{2m}(y)\,dy\right| \leqslant \sqrt{\pi}m^{1/4}\frac{\left|\frac{x}{2\sqrt{m}}\right|^{5/2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{\pi}|x|^{5/2}}{4m\sqrt{10}}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{m\to+\infty}(-1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{m}}} \frac{\sin\left(\sqrt{4m+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}-y\right)\right)}{\sqrt{4m+1}} y^2\phi_{2m}(y)\,dy = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{m\to+\infty} -1)^m\sqrt{\pi}m^{1/4}\phi_{2m}\left(\frac{x}{2\sqrt{m}}\right) = \cos x.}$$

III Intégrales de déterminants

15) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour $z \in \mathbb{R}$,

$$K^{(N)}(x,z)K^{(N)}(z,y) = \left(\sum_{k=0}^{N-1}\phi_k(x)\phi_k(z)\right)\left(\sum_{l=0}^{N-1}\phi_l(z)\phi_l(y)\right) = \sum_{0\leqslant k,l\leqslant N-1}\phi_k(x)\phi_k(z)\phi_l(z)\phi_l(y).$$

Chaque produit $\phi_k\phi_l$, $0 \leqslant k, l \leqslant N-1$, étant intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto K^{(N)}(x,z)K^{(N)}(z,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,z)K^{(N)}(z,y)\,dz &= \sum_{0\leqslant k,l\leqslant N-1}\phi_k(x)\phi_l(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_k(z)\phi_l(z)\,dz \\
&= \sum_{0\leqslant k,l\leqslant N-1}\phi_k(x)\phi_l(y)\delta_{k,l} \text{ (d'après les relations (5))} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\phi_k(x)\phi_k(y) = K^{(N)}(x,y).
\end{aligned}$$

De même, les relations (5) fournissent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_k(x)\phi_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N.$$

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,z)K^{(N)}(z,y)\,dz = K^{(N)}(x,y) \text{ et } \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(N)}(x,x)\,dx = N.}$$

16) Une composée de deux permutations de $[\![1,k]\!]$ est une permutation de $[\![1,k]\!]$ et donc $\widehat{\sigma}$ est une permutation de $[\![1,k]\!]$.
- Si $\sigma(k)=k$, $\widehat{\sigma}=\sigma$ et donc $\widehat{\sigma}(k)=k$. De plus, $\varepsilon(\widehat{\sigma})=\varepsilon(\sigma)$.
- Si $\sigma(k)\neq k$, $\widehat{\sigma}(k)=(k,\sigma(k))\,(\sigma(k))=k$. De plus, $\varepsilon(\widehat{\sigma})=-\varepsilon(\sigma)$.

$\boxed{\widehat{\sigma} \text{ est une permutation de } [\![1,k]\!] \text{ telle que } \widehat{\sigma}(k)=k, \text{ de même signature que } \sigma \text{ si } \sigma(k)=k \text{ et de signature opposée à celle de } \sigma \text{ si } \sigma(k)\neq k.}$

17) Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_k$. Pour $\tau\in\mathfrak{S}_k$ on a

$$\tau\in\theta^{-1}\left(\theta\left(\{\sigma\}\right)\right)\Leftrightarrow\theta(\tau)=\theta(\sigma)\Leftrightarrow\widetilde{\tau}=\widetilde{\sigma}\Leftrightarrow\widehat{\tau}=\widehat{\sigma}\quad(*),$$

(puisque $\widehat{\tau}(k)=k=\widehat{\sigma}(k)$).

Soit $\tau\in\mathfrak{S}_k$ telle que $\widehat{\tau}=\widehat{\sigma}$.

$$\widehat{\tau}=\widehat{\sigma}\Leftrightarrow(k,\tau(k))\circ\tau=(k,\sigma(k))\circ\sigma\Leftrightarrow\tau=(k,\tau(k))\circ(k,\sigma(k))\circ\sigma$$

Ainsi, si $\widehat{\tau}=\widehat{\sigma}$, τ est nécessairement l'une des permutations $\sigma_l=(k,l)\circ(k,\sigma(k))\circ\sigma$, $1\leqslant l\leqslant k$.

Réciproquement, pour $l\in[\![1,k]\!]$, $\sigma_l(k)=(k,l)(k)=l$ et donc $\widehat{\sigma_l}=(k,\sigma_l(k))\circ(k,l)\circ(k,\sigma(k))\circ\sigma=(k,\sigma(k))\circ\sigma=\widehat{\sigma}$. Ainsi, $\theta^{-1}\left(\theta\left(\{\sigma\}\right)\right)=\{\sigma_l,\ 1\leqslant l\leqslant k\}$. Comme les permutations σ_l, $1\leqslant l\leqslant k$, sont deux à deux distinctes (car $(k,l)\circ(k,\sigma(k))\circ\sigma=(k,l')\circ(k,\sigma(k))\circ\sigma\Rightarrow(k,l)=(k,l')\Rightarrow l=l'$, on a montré que $\operatorname{card}\left(\theta^{-1}\left(\theta\left(\{\sigma\}\right)\right)\right)=k$.

$$\boxed{\forall\sigma\in\mathfrak{S}_k,\ \operatorname{card}\left(\theta^{-1}\left(\theta\left(\{\sigma\}\right)\right)\right)=k.}$$

(Erreur d'énoncé).

18) Soient $N\in\mathbb{N}^*$, $(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_k$.

1er cas. Supposons $\sigma(k)=k$. Dans ce cas, $\widetilde{\sigma}=\widehat{\sigma}=\sigma_{/[\![1,k-1]\!]}$. De plus, $\forall i\in[\![1,k-1]\!]$, $\sigma(i)\neq k$ et donc, d'après les identités de la question 15),

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{k}K^{(N)}\left(x_i,x_{\sigma(i)}\right)\,dx_k &= \prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\sigma(i)}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}K^{(N)}\left(x_k,x_k\right)\,dx_k = N\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\sigma(i)}\right)\\ &= N\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right).\end{aligned}$$

2ème cas. Supposons $\sigma(k)\neq k$. Pour $i\in[\![1,k]\!]$, $\sigma(i)=k\Leftrightarrow i=\sigma^{-1}(k)$ et donc, toujours d'après les identités de la question 15),

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{k}K^{(N)}\left(x_i,x_{\sigma(i)}\right)\,dx_k &= \prod_{i\neq k,\ i\neq\sigma^{-1}(k)}K^{(N)}\left(x_i,x_{\sigma(i)}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}K^{(N)}\left(x_{\sigma^{-1}(k)},x_k\right)K^{(N)}\left(x_k,x_{\sigma(k)}\right)\,dx_k\\ &= K^{(N)}\left(x_{\sigma^{-1}(k)},x_{\sigma(k)}\right)\prod_{i\neq k,\ i\neq\sigma^{-1}(k)}K^{(N)}\left(x_i,x_{\sigma(i)}\right).\end{aligned}$$

Maintenant,
- si $i\in[\![1,k]\!]\setminus\{k,\sigma^{-1}(k)\}$, alors i n'est pas k et aussi $\sigma(i)$ n'est ni k, ni $\sigma(k)$. Par suite, $\widetilde{\sigma}(i)$ existe puis

$$\widetilde{\sigma}(i)=\widehat{\sigma}(i)=(k,\sigma(k))\circ\sigma(i)=\sigma(i),$$

- et si $i=\sigma^{-1}(k)$, alors $i\neq k$ et $\widetilde{\sigma}(i)=\widehat{\sigma}(\sigma^{-1}(k))\,(k,\sigma(k))\circ\sigma(\sigma^{-1}(k))=\sigma(k)$.

Finalement, $K^{(N)}\left(x_{\sigma^{-1}(k)}, x_{\sigma(k)}\right) \displaystyle\prod_{i\neq k,\ i\neq\sigma^{-1}(k)} K^{(N)}\left(x_i, x_{\sigma(i)}\right) = \prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}\left(x_i, x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right)$.

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k,\ \forall\sigma\in\mathfrak{S}_k,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{k} K^{(N)}\left(x_i, x_{\sigma(i)}\right)\,dx_k = \left\{\begin{array}{l} N\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}\left(x_i, x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right)\ \text{si}\ \sigma(k)=k\\ \displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} K^{(N)}\left(x_i, x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right)\ \text{si}\ \sigma(k)\neq k\end{array}\right..}$$

19) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\ldots,x_k)\,dx &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{k}K^{(N)}\left(x_i,x_{\sigma(i)}\right)\,dx_k\\
&= N\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)=k}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right) + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)\neq k}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right)\\
&= N\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)=k}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right) - \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)\neq k}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right)
\end{aligned}$$

(d'après la question 16) et puisque $\varepsilon(\widetilde{\sigma}) = \varepsilon(\widehat{\sigma})$).

Maintenant, la question 17) montre que chaque élément σ' de $\mathfrak{S}_{k-1}$ a exactement k antécédents par θ dans $\mathfrak{S}_k$. On peut donc partitionner $\mathfrak{S}_k$ en k parties $S_1,\ldots,S_k$ constituées chacune de $(k-1)!$ éléments telles que la restriction de θ à chaque S_i, $1\leqslant i\leqslant k$, soit une bijection de S_i sur $\mathfrak{S}_{k-1}$. De plus, comme $\forall \in\in\mathfrak{S}_k$, $\theta(\widehat{\sigma}) = \widetilde{\sigma}$ et que $\widehat{\sigma}(k) = k$, tout élément σ' de $\mathfrak{S}_{k-1}$ admet un antécédent σ par θ vérifiant de plus $\sigma(k) = k$. Par suite, on peut imposer que l'une des parties S_i, par exemple S_1, soit constituée des éléments $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ telles que $\sigma(k) = k$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\ldots,x_k)\,dx &= N\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)=k}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right) - \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\ \sigma(k)\neq k}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right)\\
&= N\sum_{\sigma\in S_1}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right) - \sum_{l=2}^{k}\sum_{\sigma\in S_l}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right)\\
&= N\sum_{\widetilde{\sigma}\in\mathfrak{S}_{k-1}}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right) - (k-1)\sum_{\widetilde{\sigma}\in\mathfrak{S}_{k-1}}\varepsilon(\widetilde{\sigma})\prod_{i=1}^{k-1}K^{(N)}\left(x_i,x_{\widetilde{\sigma}(i)}\right)\\
&= (N-k+1)\mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\ldots,x_{k-1}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{k}K^{(N)}(x_1,\ldots,x_k)\,dx_k = (N-k+1)\mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\ldots,x_{k-1}).}$$

III Déterminants et intégrales

20) Soient $N\geqslant 2$ et $(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^n$. h_{N-1} est un polynôme de degré $N-1$ unitaire et donc $h_{N-1}-x^{N-1}$ est un polynôme de degré au plus $N-2$. La famille $(h_0,\ldots,h_{N-2})$ est une base de $\mathbb{R}_{N-2}[X]$ (famille de $N-1$ polynômes de degrés deux à deux distincts et inférieurs à $N-1$. Donc il existe $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-2})\in\mathbb{R}^{N-1}$ tel que $h_{N-1}-X^{N-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-2}\alpha_k h_k$ ou encore tel que $h_{N-1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{N-2}\alpha_k h_k = X^{N-1}$. On effectue alors sur le déterminant à calculer la transformation $C_N\leftarrow C_N-\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\alpha_{k-1}C_k$. Cette transformation ne modifie pas la valeur du déterminant proposé et on obtient

$$\begin{vmatrix} h_0(x_1) & \ldots & h_{N-2}(x_1) & h_{N-1}(x_1)\\ h_0(x_2) & \ldots & h_{N-2}(x_2) & h_{N-1}(x_2)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ h_0(x_N) & \ldots & h_{N-2}(x_N) & h_{N-1}(x_N)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_0(x_1) & \ldots & h_{N-2}(x_1) & x_1^{N-1}\\ h_0(x_2) & \ldots & h_{N-2}(x_2) & x_2^{N-1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ h_0(x_N) & \ldots & h_{N-2}(x_N) & x_N^{N-1}\end{vmatrix}.$$

On réitère sur les colonnes $C_{N-1},\dots, C_2$ et en tenant compte de $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{vmatrix} h_0(x_1) & \dots & h_{N-2}(x_1) & h_{N-1}(x_1) \\ h_0(x_2) & \dots & h_{N-2}(x_2) & h_{N-1}(x_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_0(x_N) & \dots & h_{N-2}(x_N) & h_{N-1}(x_N) \end{vmatrix} = \mathrm{Van}(x_1,\dots,x_N) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} (x_j - x_i)$$

ce qui reste conventionnellement vrai quand $N = 1$.

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N,\ \det\left(h_{j-1}(x_i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N} = \mathrm{Van}(x_1,\dots,x_N) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} (x_j - x_i).}$$

21) • Pour $k = N$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_0 d_1 \dots d_{N-1}} \psi_N^{(N)}(x_1,\dots,x_N) &= \frac{1}{d_0 d_1 \dots d_{N-1}} \psi^{(N)}(x_1,\dots,x_N) = \frac{1}{d_0 d_1 \dots d_{N-1}} e^{-\sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{1\leq i<j\leqslant N} (x_j - x_i)^2 \\
&= \frac{1}{d_0 d_1 \dots d_{N-1}} e^{-\sum_{i=1}^N x_i^2} \left(\det\left(h_{j-1}(x_i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N}\right)^2 \\
&= \left(\det\left(\frac{1}{\sqrt{d_{j-1}}} e^{-\frac{x_{j-1}^2}{2}} h_{j-1}(x_i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N}\right)^2 = \left(\det\left(\phi_{j-1}(x_i)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N}\right)^2 \\
&= \det\left(\left(\phi_{k-1}(x_i)\right)_{1\leqslant i,k\leqslant N} \times {}^t\left(\phi_{k-1}(x_j)\right)_{1\leqslant j,k\leqslant N}\right) \\
&= \mathrm{Det}\left(\sum_{k=1}^N \phi_{k-1}(x_i)\phi_{k-1}(x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N} = \mathrm{Det}\left(\left(K^{(N)}(x_i, x_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant N}\right) \\
&= \mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\dots,x_N).
\end{aligned}$$

La formule de l'énoncé est donc vraie quand $k = N$.

• Soit $k \in [\![1, N]\!]$. Supposons que $\dfrac{1}{d_0 \dots d_{N-1}} \phi_k^{(N)}(x_1,\dots,x_k) = \mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\dots,x_k)$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_0 \dots d_{N-1}} \phi_{k-1}^{(N)}(x_1,\dots,x_{k-1}) &= \frac{1}{(N-(k-1))} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{d_0 \dots d_{N-1}} \psi_k^{(N)}(x_1,\dots,x_{k-1}, y)\, dy \\
&= \frac{1}{(N-(k-1))} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\dots,x_{k-1}, y)\, dy \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\dots,x_{k-1}) \text{ (d'après la question 19)).}
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{R}^N,\ \forall k \in [\![1, N]\!],\ \frac{1}{d_0 \dots d_{N-1}} \phi_k^{(N)}(x_1,\dots,x_k) = \mathrm{Det}K^{(N)}(x_1,\dots,x_k).}$$

