SESSION 2009

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIEME EPREUVE. FILIERE PC

I Question préliminaire

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f\ :\ u \mapsto \dfrac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus,

- Si $x \geqslant 1$, $f(u) \underset{u\to 0}{\sim} u^{-x}$ avec $-x \leqslant -1$. Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $]0,1]$.
- Si $x \leqslant 0$, $f(u) \underset{u\to 0}{\sim} u^{x-1}$ avec $x-1 \leqslant -1$. Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $]0,1]$.
- Si $0 < x < 1$, $f(u) \underset{u\to 0}{\sim} u^{x-1}+u^{-x}$ avec $x-1 > -1$ et $-x > -1$. Dans ce cas, la fonction $uu^{x-1}+u^{-x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et il en est de même de f.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ I(x) \text{ existe si et seulement si } x \in]0,1[.}$$

II Une identité intégrale

2) Soient $x > 0$ et $y \in [0,1[$. Puisque f est développable en série entière sur $[0,1[$, f est en particulier continue sur $[0,1[$. La fonction $v \mapsto yv$ est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,y] \subset [0,1[$ et la fonction f est continue sur $[0,1[$. Par suite, la fonction $v \mapsto f(vy)$ est continue sur $[0,1]$ puis la fonction $v \mapsto v^{x-1}f(vy)$ est continue sur $]0,1]$. De plus, f est continue en 0 et donc bornée au voisinage de 0. On en déduit que quand v tend vers 0, $v^{x-1}f(vy) = O(v^{x-1})$ avec $x-1 > -1$. Finalement, la fonction $v \mapsto v^{x-1}f(vy)$ est intégrable sur $]0,1]$.

3) On note tout d'abord que pour $x > 0$ et $y \in [0,1[$, on a $S[f](x,y) = \displaystyle\int_0^1 v^{x-1}f(vy)\ dv$.

Soient $x > 0$ et $a \in]0,1[$. Pour $(v,y) \in]0,1] \times [0,a]$, on pose $\Phi(v,y) = v^{x-1}f(vy)$.

- Pour chaque $y \in [0,a]$, la fonction $v \mapsto \Phi(v,y)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.
- Pour chaque $v \in]0,1]$, la fonction $y \mapsto \Phi(v,y)$ est continue sur $[0,a]$.
- Pour chaque $(v,y) \in]0,1] \times [0,a]$, $|\Phi(v,y)| = v^{x-1}|f(vy)| \leqslant \|f\|_{a,\infty}v^{x-1} = \varphi_0(v)$ où $\|f\|_{a,\infty}$ désigne la borne supérieure sur le segment $[0,a]$ de la fonction continue $|f|$. De plus, la fonction φ_0 est continue par morceaux et intégrable sur le segment $]0,1]$ car $x-1 > -1$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $y \mapsto S[f](x,y)$ est continue sur $[0,a]$ et ceci pour tout $a \in]0,1[$. Finalement, la fonction $y \mapsto S[f](x,y)$ est continue sur $[0,1[$.

$$\boxed{\forall x > 0, \text{ la fonction } y \mapsto S[f](x,y) \text{ est continue sur } [0,1[.}$$

4) Soit $x \in F = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Soit $y \in [0,1[$. Pour $v \in]0,1]$, on a

$$v^{x-1}f(yv) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n v^{x+n-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $v \in]0,1]$, posons $f_n(v) = a_n y^n v^{x+n-1}$.

- Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,1]$ car dominée au voisinage de 0 par v^{x-1} avec $x-1 > -1$.
- La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction $v \mapsto v^{x-1}f(yv)$ sur $]0,1]$. De plus, la fonction $v \mapsto v^{x-1}f(yv)$ est continue sur $]0,1]$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |f_n(v)|\ dv = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|y^n\int_0^1 v^{x+n-1}\ dv = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|a_n|y^n}{x+n}$. Mais $\dfrac{|a_n|y^n}{x+n} \underset{n\to+\infty}{=} o(|a_n|y^n)$ et puisque la série de terme général $|a_n|y^n$ converge (puisque $|y| < 1$), on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |f_n(v)|\ dv < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, la fonction $v \mapsto v^{x-1}f(yv)$ est intégrable sur $]0,1]$ et

$$S[f](x,y) = \int_0^1 v^{x-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n v^n\right)\ dv = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n \int_0^1 v^{x+n-1}\ dv = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+x}y^n.$$

$$\boxed{\forall(x,y)\in F\times[0,1[,\ S[f](x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+x}y^n.}$$

5) Soient $x\in F$ et $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}I_n(x)&=\frac{(-1)^n\pi}{\sin(\pi x)}\int_0^1\cos(\pi(n+x)t)\ dt=\frac{(-1)^n\pi}{\sin(\pi x)}\left[\frac{\sin(\pi(n+x)t)}{\pi(n+x)}\right]_0^1=\frac{(-1)^n\pi}{\sin(\pi x)}\times\frac{\sin(\pi(n+x))}{\pi(n+x)}\\&=\frac{(-1)^n\pi}{\sin(\pi x)}\times\frac{(-1)^n\sin(\pi x)}{\pi(n+x)}=\frac{1}{n+x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x,\in F,\ \forall n\in\mathbb{N},\ I_n(x)=\frac{1}{n+x}.}$$

6) Soient $x\in F$ et $y\in[0,1[$. Pour $t\in[0,1]$, on a

$$e^{i\pi xt}\widetilde{f}\left(-ye^{i\pi t}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n e^{i\pi(x+n)t}y^n.$$

Comme en 4), puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\left|(-1)^n a_n y^n e^{i\pi(x+n)t}\right|\ dt=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|y^n<+\infty$, u théorème d'intégration terme à terme permet d'écrire

$$\begin{aligned}J[f](x,y)&=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\mathrm{Re}\left[\int_0^1 e^{i\pi xt}\widetilde{f}\left(-ye^{i\pi t}\right)\ dt\right]=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(-y)^n\int_0^1\mathrm{Re}\left(e^{i\pi(x+n)t}\right)\ dt\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n y^n\frac{(-1)^n\pi}{\sin(\pi x)}\int_0^1\cos(\pi(n+x)t)\ dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+x}y^n.\end{aligned}$$

En tenant compte de la question 4), on a montré que

$$\boxed{\forall(x,y)\in F\times]0,1[,\ S[f](x,y)=J[f](x,y).}$$

7) La fonction g est développable en série entière sur $[0,1[$ et pour $u\in[0,1[$, $g(u)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n$. On peut appliquer ce qui précède à la fonction g.

Pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, $\widetilde{g}(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z}$.
Soient $x\in]0,1[(\subset F)$ et $y\in[0,1[$. D'après la question 6)

$$\begin{aligned}S[g](x,y)=J[g](x,y)&=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\mathrm{Re}\left[\int_0^1\left(\frac{e^{i\pi xt}}{1-ye^{i\pi t}}\right)\ dt\right]=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\mathrm{Re}\left[\int_0^1\left(\frac{e^{i\pi xt}(1-ye^{-i\pi t})}{(1-ye^{i\pi t})(1-ye^{-i\pi t})}\right)\ dt\right]\\&=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\int_0^1\frac{\mathrm{Re}\left(e^{i\pi xt}-ye^{i\pi(x-1)t}\right)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ dt=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\int_0^1\frac{\cos(\pi xt)-y\cos(\pi(1-x)t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ dt\end{aligned}$$

Ensuite, $1-x\in]0,1[$ et en remplaçant x par $1-x$, on obtient

$$\begin{aligned}S[g](1-x,y)&=\frac{\pi}{\sin(\pi(1-x))}\int_0^1\frac{\cos(\pi(1-x)t)-y\cos(\pi((1-x)-1)t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ dt\\&=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\int_0^1\frac{\cos(\pi(1-x)t)-y\cos(\pi xt)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ dt\end{aligned}$$

et finalement

$$C[g](x,y) = S[g](x,y) + S[g](1-x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\int_0^1 \frac{\cos(\pi x t) - y\cos(\pi(1-x)t) + \cos(\pi(1-x)t) - y\cos(\pi x t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ dt$$
$$= \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)}\int_0^1 \frac{\cos(\pi x t) + \cos(\pi(1-x)t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ dt$$

$$\boxed{\forall (x,y)\in]0,1[^2,\ C[g](x,y) = \frac{\pi(1-y)}{\sin(\pi x)}\int_0^1 \frac{\cos(\pi x t) + \cos(\pi(1-x)t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ dt.}$$

III Noyau de Poisson

8) Soit $y \in [0,1[$ et $t \in [0,1]$. Déjà $|ye^{i\pi t}| = y < 1$ et donc $1 - ye^{i\pi t} \neq 0$ puis

$$\frac{1+ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}} = \frac{(1+ye^{i\pi t})(1-ye^{-i\pi t})}{(1-ye^{i\pi t})(1-ye^{-i\pi t})} = \frac{1-y^2+2iy\sin(\pi t)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}$$

et donc $P(t,y) = \dfrac{1-y^2}{1-2y\cos(\pi t)+y^2} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1+ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}}\right)$.

$$\boxed{\forall y \in [0,1[,\ \forall t \in [0,1],\ P(t,y) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}}\right).}$$

9) Soit $t \in [0,1]$. Pour $y \in [0,1[$, $|ye^{i\pi t}| = y < 1$ et

$$\frac{1+ye^{i\pi t}}{1-ye^{i\pi t}} = (1+ye^{i\pi t})\sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{in\pi t} = \sum_{n=0}^{+\infty} y^n e^{in\pi t} + \sum_{n=0}^{+\infty} y^{n+1}e^{i(n+1)pit} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} y^n e^{in\pi t},$$

et en prenant la partie réelle des deux membres, on obtient

$$\boxed{\forall y \in [0,1[,\ \forall t \in [0,1],\ P(t,y) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n\pi t)y^n.}$$

10) Soit $y \in [0,1[$. Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 |\cos(n\pi t)y^n|\ dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} y^n < +\infty$, on peut intégrer terme à terme comme en 4) et on obtient

$$\int_0^1 P(y,t)\ dt = \int_0^1 1\ dt + 2\sum_{n=1}^{+\infty} y^n \int_0^1 \cos(n\pi t)\ dt = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\pi)}{n}y^n = 1.$$

11) Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $(t,y) \in [\alpha,1]\times[0,1]$, $1-2y\cos(\pi t)+y^2 = (1-ye^{i\pi t})(1-ye^{-i\pi t}) = |1-ye^{i\pi t}|^2$.
-Si $y<1$, on a déjà vu que que $|ye^{i\pi t}| = y < 1$ et en particulier $|1-ye^{i\pi t}| \neq 0$.
-Si $y = 1$, $|1-ye^{i\pi t}| = 0 \Leftrightarrow e^{i\pi t} = 1 \Leftrightarrow t \in 2\mathbb{Z}$. Mais $t \in]0,1]$ et donc $|1-ye^{i\pi t}| \neq 0$.
Ainsi, $\forall (t,y) \in [\alpha,1]\times[0,1]$, $1-2y\cos(\pi t)+y^2 = |1-ye^{i\pi t}| > 0$.

Soit $y \in [0,1]$. La fonction $t \mapsto \cos(\pi t)$ est décroissante sur $[\alpha,1]$ et donc la fonction $t \mapsto P(t,y)$ est décroissante sur $[\alpha,1]$. Mais alors

$$\left|\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| \leqslant \int_\alpha^1 P(t,y)|\varphi(t)|\ dt \leqslant P(\alpha,y)\int_0^1 |\varphi(t)|\ dt.$$

Mais quand y tend vers 1, $P(\alpha,y)$ tend vers $\dfrac{1-1}{2-\cos(\pi\alpha)} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{y\to 1}\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt = 0$.

D'autre part, pour $y \in [0,1[$ donné,

$$\left|\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| \leqslant \int_0^\alpha P(t,y)|\varphi(t)|\ dt \leqslant \sup_{u\in[0,\alpha]}|\varphi(u)|\int_0^\alpha P(t,y)\ dt \leqslant \sup_{u\in[0,\alpha]}|\varphi(u)|\int_0^1 P(t,y)\ dt = \sup_{u\in[0,\alpha]}|\varphi(u)|.$$

$$\boxed{\forall \alpha \in]0,1[,\ \lim_{y\to 1}\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt = 0 \text{ et } \forall \alpha \in]0,1[,\ \forall y \in [0,1[,\ \left|\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| \leqslant \sup_{t\in[0,\alpha]}|\varphi(t)|.}$$

.

12) Supposons tout d'abord $\varphi(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

La fonction φ est continue en 0. On peut donc choisir $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\forall t \in [0, \alpha]$, $|\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. α étant ainsi dorénavant fixé, on a $\sup_{t\in[0,\alpha]} |\varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après la question précédente, pour tout $y \in [0, 1[$, on a

$$\left|\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| \leqslant \left|\int_0^\alpha P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| + \left|\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt\right|.$$

Toujours d'après la question précédente, $\lim_{y\to 1} \int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt = 0$ et il existe $\nu \in]0, 1[$ tel que

$$\forall y \in [0,1[,\ (|y-1] < \nu \Rightarrow \left|\int_\alpha^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $y \in]1-\nu, 1[$, on a alors $\left|\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu > 0/\ \forall y \in [0,1[,\ (|y-1| < \nu \Rightarrow \left|\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt\right| < \varepsilon)$ et donc que $\lim_{y\to 1} \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt = 0$.

Soit alors φ une application définie et continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles quelconque. Pour $y \in [0, 1[$, $\int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt = \int_0^1 P(t,y)(\varphi(t)-\varphi(0))\ dt + \varphi(0)\int_0^1 P(t,y)\ dt = \int_0^1 P(t,y)(\varphi(t)-\varphi(0))\ dt + \varphi(0)$ (d'après la question 10)). Puisque la fonction $\varphi - \varphi(0)$ s'annule en 0, le travail précédent montre que

$$\boxed{\lim_{y\to 1} \int_0^1 P(t,y)\varphi(t)\ dt = \varphi(0).}$$

IV Application à un calcul d'intégrale

13) Soit $(x, y) \in]0, 1[\times[0, 1[$. D'après la question 7),

$$\begin{aligned}(1+y)C[g](x,y) &= \frac{\pi(1-y^2)}{\sin(\pi x)}\int_0^1 \frac{\cos(\pi(1-x)t)+\cos(\pi xt)}{1-2y\cos(\pi t)+y^2}\ dt \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\left(\int_0^1 P(t,y)\cos(\pi xt)\ dt + \int_0^1 P(t,y)\cos(\pi(1-x)t)\ dt\right) \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}(A(x,y)+A(1-x,y)),\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,1[\times[0,1[,\ C[g](x,y) = \frac{\pi(A(x,y)+A(1-x,y))}{(1+y)\sin(\pi x)}.}$$

14) Soit $x \in]0, 1[$. D'après la question 12) appliquée à la fonction $\varphi\ :\ t \mapsto \cos(\pi xt)$ qui est bien continue sur le segment $[0, 1]$,

$$\lim_{y\to 1} A(x,y) = \lim_{y\to 1} \int_0^1 P(t,y)\cos(\pi xt)\ dt = \cos(\pi x\times 0) = 1,$$

et donc aussi $\lim_{y\to 1} A(1-x,y) = 1$. D'après la question 13) on a donc

$$\lim_{y\to 1} C[g](x,y) = \frac{\pi(1+1)}{(1+1)\sin(\pi x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \lim_{y\to 1} C[g](x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.}$$

15) Soit $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$. En posant $u = yv$, on obtient

$$C[g](x,y) = S[g](x,y) + S[g](1-x,y) = \int_0^1 \frac{v^{x-1}}{1+yv}\,dv + \int_0^1 \frac{v^{-x}}{1+yv}\,dv = y^{-x}\int_0^y \frac{u^{x-1}}{1+u}\,du + y^{x-1}\int_0^y \frac{u^{-x}}{1+u}\,du$$

Quand y tend vers 1, cette dernière expression tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u}\,du + \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u}\,du = I(x)$ et on a donc montré que

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \int_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.}$$

