SESSION 2006

Concours commun Mines-Ponts

PREMIERE EPREUVE. FILIERE PC

I Préliminaires

1) Soit $f \in C_0$. Tf est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de plus pour $x \in \mathbb{R}$

$$Tf(x+1) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}+1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = Tf(x),$$

et donc $Tf \subset C^0$.

$$\boxed{T(C^0) \subset C^0.}$$

2) Soit $f \in C^0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|Tf(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\right) \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_\infty + \|f\|_\infty) = \|f\|_\infty$ et donc $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Ainsi, $\forall f \in C^0$, $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ puis $\sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} \|Tf\|_\infty \leqslant 1$. D'autre part $\|Te_0\|_\infty = \|e_0\|_\infty = 1$ ce qui impose $\sup\limits_{\|f\|_\infty = 1} \|Tf\|_\infty \geqslant 1$. Finalement,

$$\boxed{\sup_{\|f\|_\infty = 1} \|Tf\|_\infty = 1.}$$

3) Soit $f \in H_0$.

$$\int_0^1 Tf(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\,dx + \int_0^1 f\left(\frac{x+1}{2}\right)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{1/2} f(u)\,2du + \int_{1/2}^1 f(u)\,2du\right) = \int_0^1 f(u)\,du = 0.$$

Donc $Tf \in H^0$.

$$\boxed{T(H^0) \subset H^0.}$$

4) Soient $f \in C^0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f - \alpha e_0 \in H_0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - \lambda)\,dx = 0 \Leftrightarrow \lambda = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

$$\boxed{\forall f \in C^0,\ P(f) = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) e_0.}$$

II Fonctions trigonométriques

5) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$Te_k(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ik\pi x} + e^{ik\pi\pi(x+1)}\right) = \frac{1+(-1)^k}{2}e^{ik\pi x} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ e_{k/2}(x) \text{ si } k \text{ est pair} \end{cases}.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z},\ Te_{2p} = e_p \text{ et } Te_{2p+1} = 0.}$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\displaystyle\int_0^1 e^{2ik\pi x}\,dx = \delta_{k,0}$ et donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ Pe_k = \delta_{k,0} e_0.}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ puis $k \in [\![-n, n]\!]$. Si k est impair, $T(e_k) = 0 \in E_n$ et si k est pair, alors $\dfrac{k}{2} \in [\![-n, n]\!]$ puis $T(e_k) = e_{k/2} \in E_n$. Par suite, $T(E_n) = \text{Vect}(Te_k)_{-n \leqslant k \leqslant n} \subset E_n$. D'autre part, $P(E_n) \subset D = E_0 \subset E_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T(E_n) \subset E_n \text{ et } P(E_n) \subset E_n.}$$

6) Soient $(a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^5$ puis $f = a_{-2}e_{-2} + a_{-1}e_{-1} + a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2$.

$$T_2f = T_2(a_{-2}e_{-2} + a_{-1}e_{-1} + a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2) = a_{-2}e_{-1} + a_0e_0 + a_2e_1.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Puisque la famille $(e_k)_{-2 \leqslant k \leqslant 2}$ est libre

$$T_2f = \lambda f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda a_{-2} = 0 \\ \lambda a_{-1} = a_{-2} \\ \lambda a_0 = a_0 \\ \lambda a_1 = a_2 \\ \lambda a_2 = 0 \end{array}\right. \quad (S).$$

• Si $\lambda \notin \{0, 1\}$, $(S) \Leftrightarrow a_{-2} = a_{-1} = a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et λ n'est pas valeur propre de T_2.
• Si $\lambda = 0$, $(S) \Leftrightarrow a_{-2} = a_0 = a_2 = 0$. Donc, $\text{Ker}(T_2) \neq \{0\}$ puis 0 est valeur propre de T_2 et le sous -espace propre associé est de dimension 2.
• Si $\lambda = 1$, $(S) \Leftrightarrow a_{-2} = a_{-1} = a_1 = a_2 = 0$. Donc, $\text{Ker}(T_2 - Id_{E_2}) \neq \{0\}$ puis 1 est valeur propre de T_2 et le sous -espace propre associé est de dimension 1.

Enfin, $\dim(\text{Ker}(T_2)) + \dim(\text{Ker}(T_2 - Id_{E_2})) = 3 < 5 = \dim(E_2)$ et donc T_2 n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } T_2 \text{ sont } 0 \text{ et } 1.\ T_2 \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

7) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in \mathbb{N}^*$ l'unique entier tel que $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$.
• Soit $m \in [\![-n, n]\!] \setminus \{0\}$. m s'écrit de manière unique sous la forme $m = 2^\alpha(2\beta + 1)$ où $0 \leqslant \alpha \leqslant k - 1$ et $\beta \in \mathbb{Z}$. D'après la question 5), si $\alpha = 0$, on a $T_ne_m = 0$ et si $\alpha \neq 0$, on a $T_ne_m = T_ne_{2^\alpha(2\beta+1)} = e_{2^{\alpha-1}(2\beta+1)}$ et plus généralement par récurrence $T_n^\alpha e_m = T_n^\alpha e_{2^\alpha(2\beta+1)} = e_{2\beta+1}$. Mais alors $T_n^{\alpha+1}e_m = 0$. Ainsi, dans tous les cas, $T_n^{\alpha+1}e_m = 0$. Comme $k \geqslant \alpha + 1$, on a encore $T_n^k e_m = 0$ et plus généralement

$$\forall p \geqslant k,\ \forall m \in [\![-n, n]\!] \setminus \{0\},\ T_n^p e_m = 0 = P_ne_m.$$

• D'autre part, $T_ne_0 = e_0$ et donc $\forall p \geqslant k$, $T_n^pe_0 = e_0 = P_ne_0$. On a montré que

$$\forall p \geqslant k,\ \forall m \in [\![-n, n]\!],\ T_n^p e_m = P_ne_m.$$

Mais alors, pour $p \geqslant k$, les endomorphismes T_n^p et P_n coïncident sur une base de E_n et sont donc égaux.

$$\boxed{\forall p \geqslant k,\ T_n^p = P_n.}$$

8) Soit $f \in C^0$. Les applications f et Tf sont continues sur $\mathbb{R}$ et 1-périodiques. On peut donc calculer leurs coefficients de Fourier. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
c_n(Tf) &= \frac{1}{1}\int_0^1 Tf(x)e^{-2in\pi x}\ dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)e^{-2in\pi x}\ dx + \int_0^1 f\left(\frac{x+1}{2}\right)e^{-2in\pi x}\ dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{1/2} f(u)e^{-2in\pi(2u)}\ 2du + \int_{1/2}^1 f(u)e^{-2in\pi(2u-1)}\ 2du\right) \\
&= \int_0^{1/2} f(u)e^{-2i(2n)\pi u}\ du + \int_{1/2}^1 f(u)e^{-2i(2n)\pi u}\ du = \int_0^1 f(u)e^{-2i(2n)\pi u}\ du \\
&= c_{2n}(f).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(Tf) = c_{2n}(f).}$$

9) Soit $f \in C^0$. f et Tf sont continues sur $\mathbb{R}$ et d'après un corollaire de la formule de Parseval,

$$f \in \text{Ker}T \Leftrightarrow Tf = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(Tf) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ c_{2n}(f) = 0.$$

$$\boxed{\text{Ker}T = \{f \in C^0 /\ \forall n \in \mathbb{Z},\ c_{2n}(f) = 0.}$$

Ce noyau contient entre autre $\text{Vect}(e_{2p+1})_{p\in\mathbb{Z}}$.

III Fonctions hölderiennes

Soit $\alpha \in]0,1[$. C^α est effectivement un sous-espace vectoriel de C^0 car C^α contient 0 et est contenu dans C^0 et si de plus $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $(f,g)\in(C^\alpha)^2$, alors pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\neq y$

$$\frac{|(af+bg)(x)-(af+bg)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant |a|\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}+|b|\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant |a|m_\alpha(f)+|b|m_\alpha(g),$$

ce qui montre que $af+bg$ appartient à C^α.

10) Soit $f\in C^\alpha$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\neq y$

$$\begin{aligned}\frac{|Tf(x)-Tf(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leqslant \frac{1}{|x-y|^\alpha}\times\frac{1}{2}\left(\left|f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{y}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{y+1}{2}\right)\right|\right)\\ &\leqslant \frac{1}{|x-y|^\alpha}\times\frac{1}{2}\left(m_\alpha(f)\times\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|^\alpha+m_\alpha(f)\times\left|\frac{x+1}{2}-\frac{y+1}{2}\right|^\alpha\right)\\ &=\frac{m_\alpha(f)}{2^\alpha}.\end{aligned}$$

Par suite, $Tf\in C^\alpha$ et de plus $m_\alpha(Tf)\leqslant\dfrac{m_\alpha(f)}{2^\alpha}$.

$$\boxed{T(C^\alpha)\subset C^\alpha \text{ et } \forall f\in C^\alpha,\ m_\alpha(Tf)\leqslant\frac{m_\alpha(f)}{2^\alpha}.}$$

11) Soit $f\in C^\alpha$. D'après la question précédente et la question 2),

$$\begin{aligned}\|T_\alpha f\|_\alpha &= m_\alpha(T_\alpha f)+\|T_\alpha f\|_\infty\\ &\leqslant \frac{m_\alpha(f)}{2^\alpha}+\|f\|_\infty \leqslant m_\alpha(f)+\|f\|_\infty \text{ (car } \alpha>0)\\ &=\|f\|_\alpha.\end{aligned}$$

On en déduit déjà que $\sup\limits_{\|f\|_\alpha=1}\|T_\alpha f\|_\alpha\leqslant 1$.

D'autre part, $m_\alpha(e_0)=0$. Par suite, $e_0\in C^\alpha$ et $\|e_0\|_\alpha=m_\alpha(e_0)+\|e_0\|_\infty=0+1=1$. On en déduit que $\sup\limits_{\|f\|_\alpha=1}\|T_\alpha f\|_\alpha\geqslant$ $\|T_\alpha e_0\|_\alpha=\|e_0\|_\alpha=1$. Finalement,

$$\boxed{\forall f\in C^\alpha,\ \|T_\alpha f\|_\alpha\leqslant\|f\|_\alpha \text{ et } \sup_{\|f\|_\alpha=1}\|T_\alpha f\|_\alpha=1.}$$

12) Pour $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $|\lambda^k e_{2^k}(x)|=|\lambda|^k$ et donc pour $k\in\mathbb{N}$, $\|\lambda^k e_{2^k}\|_\infty=|\lambda|^k$. Comme $|\lambda|<1$, la série de terme général $\|\lambda^k e_{2^k}\|_\infty$. On a montré que la série de fonction de terme général $\lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on note f_λ.

Puisque chaque fonction $\lambda^k e_{2^k}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions de terme général $\lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f_λ (et donc uniformément pour les PSI), f_λ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin f_λ est 1-périodique en tant que limite simple d'une suite de fonctions 1-périodiques.

13) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question 5),

$$TS_n=T_nS_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k Te_{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k Te_{2^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k+1}e_{2^k}=\lambda S_{n-1}.$$

Soit alors $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|Tf_\lambda(x)-\lambda f_\lambda(x)| &\leqslant |Tf_\lambda(x)-TS_n(x)|+|TS_n(x)-\lambda S_{n-1}(x)|+|\lambda S_{n-1}(x)-\lambda f(x)|\\ &=|Tf_\lambda(x)-TS_n(x)|+|\lambda S_{n-1}(x)-\lambda f_\lambda(x)|\\ &\leqslant \|T(f_\lambda-S_n)\|_\infty+|\lambda|\ \|S_{n-1}-f_\lambda\|_\infty\\ &\leqslant \|f_\lambda-S_n\|_\infty+|\lambda|\ \|S_{n-1}-f_\lambda\|_\infty \text{ (d'après la question 11)).}\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $|Tf_\lambda(x) - \lambda f(x)| = 0$. On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $Tf_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$ et donc $Tf_\lambda = \lambda f_\lambda$.

Enfin, $f_\lambda(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} \neq 0$ et donc $f_\lambda \neq 0$. Ceci montre que λ est valeur propre de T.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < 1 \Rightarrow \lambda \text{ valeur propre de } T.}$$

14) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{2^\alpha}$. Puisque $\alpha > 0$, on a en particulier $|\lambda| < 1$.

• Soient x et y deux réels distincts tels que $|x-y| \leqslant 1$. Il existe un unique entier naturel n tel que $\dfrac{1}{2^{n+1}} < |x-y| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

$$|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\lambda|^k |e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k |e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)|.$$

Déjà,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k |e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)| \leqslant 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k = 2\frac{|\lambda|^{n+1}}{1-|\lambda|} \leqslant \frac{2}{1-|\lambda|}\left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^{n+1} = \frac{2}{1-|\lambda|}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{\alpha} \leqslant \frac{2}{1-|\lambda|}|x-y|^\alpha.$$

Ensuite, d'après le rappel du début de la partie III,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |\lambda|^k |e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)| &\leqslant 2\pi\left(\sum_{k=0}^{n} |\lambda|^k 2^k\right)|x-y| \leqslant 2\pi\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{1-\alpha}\right)^k |x-y| \\
&= 2\pi\frac{(2^{1-\alpha})^{n+1} - 1}{2^{1-\alpha} - 1}|x-y| \text{ (car } \alpha \in]0,1[\text{ et donc } 2^{1-\alpha} > 1) \\
&\leqslant 2\pi\frac{(2^{1-\alpha})^{n+1}}{2^{1-\alpha}-1}|x-y| = 2\pi\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1} \times 2^{n(1-\alpha)}|x-y|^{1-\alpha} \times |x-y|^\alpha \\
&\leqslant 2\pi\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}|x-y|^\alpha \text{ (car } |x-y| \leqslant 2^{-n} \text{ et } 1-\alpha > 0).
\end{aligned}$$

En résumé, si $|x-y| \leqslant 1$, $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leqslant \left(\dfrac{2}{1-|\lambda|} + 2\pi\dfrac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}\right)|x-y|^\alpha$.

• Soient x et y deux réels tels que $|x-y| > 1$. Alors $|x-y|^\alpha > 1$ et

$$|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda|^k |e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y)| \leqslant 2\sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda|^k = \frac{2}{1-|\lambda|} \leqslant \frac{2}{1-|\lambda|}|x-y|^\alpha \leqslant \left(\frac{2}{1-|\lambda|} + 2\pi\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}\right)|x-y|^\alpha.$$

On a montré que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \left(\dfrac{2}{1-|\lambda|} + 2\pi\dfrac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}\right)|x-y|^\alpha$ et donc $f_\lambda \in C^\alpha$.

15) T laisse stable H^0 d'après la question 3) et C^α d'après la question 10) et donc T laisse stable $H^\alpha = H^0 \cap C^\alpha$.

16) Soit $f \in C^0$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T^n f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(k2^{-n} + x2^{-n}\right)$.

• C'est immédiat pour $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $T^n f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(k2^{-n} + x2^{-n}\right)$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
T^{n+1}f(x) &= \frac{1}{2}\left(T^n f\left(\frac{x}{2}\right) + T^n f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k2^{-n} + x2^{-n}}{2}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k2^{-n} + x2^{-n} + 1}{2}\right)\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(k2^{-(n+1)} + x2^{-(n+1)}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left((k+2^n)2^{-(n+1)} + x2^{-(n+1)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(k2^{-(n+1)} + x2^{-(n+1)}\right) + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f\left(k2^{-(n+1)} + x2^{-(n+1)}\right)\right) \\
\frac{1}{2^{n+1}}&\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\left(k2^{-(n+1)} + x2^{-(n+1)}\right)
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T^n f(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(k2^{-n} + x2^{-n}\right).}$$

17) Soient $f \in C^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Pour $k \in [\![0, 2^n]\!]$, on pose $x_k = k2^{-n} + x2^{-n}$. $\dfrac{x}{2^n} = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2^n} = \dfrac{x}{2^n} + 1$ est une subdivision à pas constant du segment $\left[\dfrac{x}{2^n}, \dfrac{x}{2^n} + 1\right]$. Puisque f est 1-périodique, on a d'après la question 16)

$$\begin{aligned}
\left|T_\alpha^n f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| &= \left|2^{-n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k) - \int_{\frac{x}{2^n}}^{\frac{x+1}{2^n}} f(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k) - \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - x_k|^\alpha\, m_\alpha(f)\,dt \leqslant m_\alpha(f)\sum_{k=0}^{2^n-1}(x_{k+1} - x_k)|x_{k+1} - x_k|^\alpha \\
&= 2^n \times \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha m_\alpha(f) = 2^{-n\alpha} m_\alpha(f).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in [0,1]$, $\left|T_\alpha^n f(x) - \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant 2^{-n\alpha} m_\alpha(f)$ et on a montré que

$$\boxed{\forall f \in C^\alpha,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in[0,1]}\left|T_\alpha^n f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant 2^{-n\alpha} m_\alpha(f).}$$

18) Soient $f \in H^\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ et puisque $T_\alpha^n f$ est 1-périodique, la question précédente fournit

$$\|T_\alpha^n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |T_\alpha^n f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}\left|T_\alpha^n f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant 2^{-n\alpha} m_\alpha(f).$$

D'autre part, la question 10) fournit $m_\alpha(T_\alpha f) \leqslant \dfrac{m_\alpha(f)}{2^\alpha}$ et donc par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}$, $m_\alpha(T_\alpha^k f) \leqslant \dfrac{m_\alpha(f)}{2^{k\alpha}}$. Par suite,

$$\|T_\alpha^n f\|_\alpha = m_\alpha(T_\alpha^n f) + \|T_\alpha^n f\|_\infty \leqslant \frac{m_\alpha(f)}{2^{n\alpha}} + \frac{m_\alpha(f)}{2^{n\alpha}} \leqslant 2 \times \frac{\|f\|_\alpha}{2^{n\alpha}} = 2^{1-n\alpha}\|f\|_\alpha.$$

$$\boxed{\forall f \in H^\alpha,\ \|T_\alpha^n f\|_\alpha \leqslant 2^{1-n\alpha}\|f\|_\alpha.}$$

19) • Les questions 13) et 14) montre que si λ est un nombre complexe tel que $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{2^\alpha}$, alors λ est valeur propre de T_α. D'autre part, e_0 est dans C^α et $T_\alpha e_0 = e_0$. Donc 1 est également valeur propre de T_α.

• Réciproquement, soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de T_α puis $f \in C^\alpha \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. f s'écrit de manière unique sous la forme $f = ke_0 + g$ où $k \in \mathbb{C}$ et $g \in H^0$ (d'après la question 4), $k = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ et $g = f - \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\right) e_0$).

$$\begin{aligned}
T_\alpha f = \lambda f &\Leftrightarrow T_\alpha(ke_0 + g) = \lambda(ke_0 + g) \Leftrightarrow ke_0 + T_\alpha g = \lambda ke_0 + \lambda g \\
&\Leftrightarrow ke_0 = \lambda ke_0 \text{ et } T_\alpha g = \lambda g \text{ (car } T_\alpha g \in H^0 \text{ d'après la question 3))} \quad (*).
\end{aligned}$$

Si $\lambda = 1$, 1 est effectivement valeur propre de T_α et si $\lambda \neq 1$, $(*)$ fournit $k(1-\lambda)e_0 = 0$ et donc $k = 0$ puis $f = g \in H^\alpha$. Ainsi, si λ est une valeur propre de T_α distincte de 1, les vecteurs propres associés sont dans H^α.

Soient donc λ une valeur propre de T_α distincte de 1 et $f \in H^\alpha$ un vecteur propre associé. La question précédente fournit pour tout entier naturel n

$$2^{1-n\alpha}\|f\|_\alpha \geqslant \|T_\alpha^n f\|_\alpha = \|\lambda^n f\|_\alpha = |\lambda|^n \|f\|_\alpha,$$

et puisque $\|f\|_\infty > 0$, on obtient après simplification

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (2^\alpha|\lambda|)^n \leqslant 2.$$

En particulier, la suite géométrique $\left((2^\alpha|\lambda|)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ce qui impose $2^\alpha|\lambda| \leqslant 1$ et finalement $|\lambda| \leqslant 2^{-\alpha}$. On a montré que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T_\alpha) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\ |\lambda| \leqslant 2^{-\alpha}\} \cup \{1\}.}$$

