SESSION 2009

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIEME EPREUVE. FILIERE MP

Question préliminaire

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Les fonctions ϕ_{λ_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont dans $C([0,1])$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \neq (0,\ldots,0)$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_{\lambda_i} = 0$.

On peut alors considérer $k = \text{Min}\{i \in [\![1,n]\!]/\ \alpha_i \neq 0\}$. Par définition $\alpha_k \neq 0$.

$$\forall x \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{\lambda_i} = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ \sum_{i=k}^{n} \alpha_i x^{\lambda_i} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0,1],\ \sum_{i=k}^{n} \alpha_i x^{\lambda_i-\lambda_k} = 0,$$

après division des deux membres par le réel non nul x^{λ_k}. Mais quand x tend vers 0, on obtient $\alpha_k = 0$ ce qui est une contradiction. Donc la famille $(\phi_{\lambda_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(\phi_{\lambda_i})_{\lambda\geqslant 0}$ est libre et donc

$$\boxed{\text{la famille } (\phi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0} \text{ est une famille libre de } C([0,1]).}$$

A. Déterminants de Cauchy

2) Si les b_k sont deux à deux distincts, la décomposition en éléments simples de R est de la forme $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$.

En notant C_1, ..., C_n, les colonnes de D_n et C la colonne $\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$, on a $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_kC_k$ et donc par linéarité par rapport à la dernière colonne

$$\det(C_1,\ldots,C_{n-1},C) = \sum_{k=1}^{n} A_k\det(C_1,\ldots,C_{n-1},C_k) = A_n\det(C_1,\ldots,C_{n-1},C_n) = A_nD_n,$$

car pour $k < n$, $\det(C_1,\ldots,C_{n-1},C_k)$ est un déterminant ayant deux colonnes égales et est donc nul.

Maintenant, $R(a_1) = \ldots = R(a_{n-1}) = 0$ et donc $C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R(a_n) \end{pmatrix}$ et en développant $\det(C_1,\ldots,C_{n-1},C)$ suivant sa dernière colonne, on obtient $\det(C_1,\ldots,C_{n-1},C) = R(a_n)D_{n-1}$. Ainsi (si $n \geq 2$ et)

$$\boxed{\text{si les } b_k \text{ sont deux à deux distincts, } A_nD_n = R(a_n)D_{n-1}.}$$

3) Supposons toujours les b_k deux à deux distincts. On sait que

$$A_n = \lim_{x\to -b_n}(x+b_n)R(x) = \frac{(-b_n-a_1)\ldots(-b_n-a_{n-1})}{(-b_n+b_1)\ldots(-b_n+b_{n-1})} = \frac{(a_1+b_n)\ldots(a_{n-1}+b_n)}{(b_n-b_1)\ldots(b_n-b_{n-1})}$$

et donc

$$D_n = \frac{R(a_n)}{A_n} D_{n-1} = \frac{(a_n - a_1)\dots(a_n - a_{n-1})(b_n - b_1)\dots(b_n - b_{n-1})}{(a_1 + b_n)\dots(a_{n-1} + b_n)(a_n + b_n)(a_n + b_{n-1})\dots(a_n + b_1)} = \frac{\displaystyle\prod_{i<n}(a_n - a_i)\prod_{i<n}(b_n - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,i\leqslant n,\ i=n \text{ ou } j=n}(a_i + b_j)}$$

En tenant compte de $D_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$, on en déduit,

$$D_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\displaystyle\prod_{i<k}(a_k - a_i)\prod_{i<k}(b_k - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant k,\ i=k \text{ ou } j=k}(a_i + b_j)}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}$$

Cette formule reste valable quand les b_k ne sont pas deux distincts car dans ce cas D_n a deux colonnes égales et est donc nul.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_1,\dots,a_n)\mathrm{Van}(b_1,\dots,b_n)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}.}$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé

4) Soit $x \in E$.

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A/\ \|x - y\| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in \overline{A}.$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}.}$$

5) Soient $x \in E$ et B et C deux parties non vides de E telles que $B \subset C$. Alors, $d(x, C) \leqslant d(x, B)$. En effet, pour tout y de B, on a $y \in C$ et donc $\|x - y\| \geqslant d(x, C)$. Par suite, $d(x, C)$ est un minorant de $\{\|x - y\|,\ y \in B\}$ et puisque $d(x, B)$ est le plus grand des minorants de cet ensemble, on a bien $d(x, C) \leqslant d(x, B)$.

Soit $x \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \subset A_{n+1} \subset A$ et donc $d(x, A) \leqslant d(x, A_{n+1}) \leqslant d(x, A_n)$. Donc la suite $(d(x, A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $d(x, A)$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in A$ tel que $d(x, A) \leqslant \|y - x\| \leqslant d(x, A) + \varepsilon$. Puisque A est la réunion des A_n, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_{n_0}$. Par suite,

$$d(x, A) \leqslant d(x, A_{n_0}) \leqslant \|y - x\| \leqslant d(x, A) + \varepsilon.$$

Pour $n \geq n_0$, on a alors

$$d(x, A) \leqslant d(x, A_n) \leqslant d(x, A_{n_0}) \leqslant d(x, A) + \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow d(x, A) \leqslant d(x, A_n) < d(x, A) + \varepsilon)$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d(x, A_n) = d(x, A)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x, A) = \lim_{n\to+\infty} d(x, A_n).}$$

6) Puisque V est un sous-espace de dimension finie de E, V est un fermé de E. On sait qu'une boule fermée de E est un compact de E et donc B est un compact de E. $B \cap V$ est donc l'intersection d'un compact et d'un fermé et on sait que $B \cap V$ est compact. On note de plus que $B \cap V$ n'est pas vide car $0 \in B$ ($\|0 - x\| \leqslant \|x\|$), $0 \in V$ (V étant un sous-espace vectoriel) et donc $0 \in B \cap V$

Soit $x \in E$. Puisque $B \cap V \subset V$, on a $d(x, V) \leqslant d(x, B \cap V)$.

Inversement, pour $y \in V$,
- si $y \in B$, alors $d(x, B \cap V) \leqslant \|x - y\|$;
- si $y \notin B$, $\|y - x\| > \|x\| = \|0 - x\| \geq d(x, B \cap V)$.

En résumé, $d(x, B \cap V)$ est un minorant de $\{\|x - y\|,\ y \in V\}$ et donc $d(x, B \cap V) \leqslant d(x, V)$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x, V) = d(x, B \cap V).}$$

7) Soit $x \in E$. $d(x, V) = d(x, B \cap V)$. Donc, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B \cap V$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n - x\| = d(x, V)$. Puisque $B \cap V$ est un compact, on peut extraire de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite $y \in B \cap V \subset V$. Puisque la suite $(\|y_{\varphi(n)} - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite convergente $(\|y_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(\|y_{\varphi(n)} - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $d(x, V)$. Mais alors par continuité de l'application $u \mapsto \|u\|$ dans l'espace normé $(E, \|\ \|)$, on a

$$d(x, V) = \lim_{n\to+\infty} \|y_{\varphi(n)} - x\| = \|\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} - x\| = \|y - x\| \text{ avec } y \in V.$$

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists y \in V/\ d(x, V) = \|y - x\|.}$$

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

(erreur d'énoncé : lire « E est un espace préhilbertien réel »).

8) Soit $x \in E$ et $y = p_V(x) \in V$. Puisque V est de dimension finie, le théorème de la projection orthogonale permet d'affirmer que $\forall z \in V$, $\|z - x\| \geqslant \|y - x\|$ avec égalité si et seulement si $z = y$ (la principale raison étant $\|z - x\|^2 = \|z - y\|^2 + \|y - x\|^2$). Donc, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|y - x\|$.

9) Posons $V = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ puis $p = \dim(V)$ $(p \leqslant n < +\infty)$. Notons $\mathscr{B}$ une base orthonormée de V puis N la matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. N est un élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée on a $M = {}^tNN$.

• Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée (c'est le cas $p < n$), la matrice N a un noyau non réduit à $\{0\}$ et donc il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $NX = 0$. On a encore $MX = {}^tNNX = 0$ et le noyau de la matrice carrée M n'est pas réduit à $\{0\}$. Son déterminant est donc nul.
• Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, on a $p = n$ et de plus N est une matrice carrée inversible.
Dans ce cas, $\det(M) = (\det(N))^2 \neq 0$.

On a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (x_1, \ldots, x_n) \text{ est libre si et seulement si } G(x_1, \ldots, x_n) = 0.}$$

10) Soit $x \in E$. Puisque $x = x - p_V(x) + p_V(x)$, la dernière colonne de $G(x_1, \ldots, x_n, x)$ s'écrit à l'aide du théorème de Pythagore

$$\begin{pmatrix} (x_1|x) \\ (x_2|x) \\ \vdots \\ (x_n|x) \\ (x|x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1|x) \\ (x_2|x) \\ \vdots \\ (x_n|x) \\ \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x)\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1|x) \\ (x_2|x) \\ \vdots \\ (x_n|x) \\ \|p_V(x)\|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \|x - p_V(x)\|^2 \end{pmatrix}$$

Par linéarité par rapport à sa dernière colonne, $G(x_1, \ldots, x_n, x)$ est alors somme de deux déterminants.

• Puisque $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $(x_k|x) = (x_k|p_V(x))$, le premier de ces deux déterminants est $G(x_1, \ldots, x_n, p_V(x))$. Puisque $p_V(x) \in \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, la famille $(x_1, \ldots, x_n, p_V(x))$ est liée et $G(x_1, \ldots, x_n, p_V(x)) = 0$ d'après la question précédente.
• On développe alors le deuxième déterminant par rapport à sa dernière colonne et on obtient $\|x - p_V(x)\|^2 \times G(x_1, \ldots, x_n)$ ou encore $(d(x, V))^2 \times G(x_1, \ldots, x_n)$.

Puisque $G(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, \ldots, x_n)}.}$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

11) Soit $f \in C([0,1])$.

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \left(N_\infty(f)\right)\,dx\right)^{1/2} = N_\infty(f).$$

Soit A une partie de E. Si $A = \varnothing$, on a $\overline{A}^\infty = \overline{A}^2 = \varnothing$ et en particulier $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.
Supposons maintenant $A \neq \varnothing$.
$\overline{A}^\infty$ est le plus petit fermé pour N_∞ contenant A. Vérifions que $\overline{A}^2$ est un fermé de E pour N_∞ (contenant A).
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{A}^2$ convergeant pour N_∞ vers un certain $y \in E$. L'inégalité $N_2 \leqslant N_\infty$ montre que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore vers y pour N_2. Mais $\overline{A}^2$ est un fermé de E pour N_2 et donc $y \in \overline{A}^2$.
On a montré que pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{A}^2$, convergente pour N_∞, la limite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\overline{A}^2$ et donc $\overline{A}^2$ est un fermé de E pour N_∞, contenant A.
Puisque $\overline{A}^\infty$ est le plus petit fermé de E pour N_∞ contenant A, on a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{P}(C([0,1])),\ \overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2.}$$

12) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = \begin{cases} nx \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$. Chaque fonction f_n est dans $C([0,1])$ et

$$N_2(f_n - \phi_0) = \left(\int_0^{1/n} (nx-1)^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\left[\frac{(nx-1)^3}{3n}\right]_0^{1/n}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(f_n - \phi_0) = 0$, on a montré que

$$\boxed{\phi_0 \in \overline{V_0}^2.}$$

13) Montrons que V_0 n'est pas dense dans E pour N_∞. Pour cela vérifions que l'élément ϕ_0 de $C([0,1])$ n'est pas dans $\overline{V_0}^\infty$. Dans le cas contraire, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ s'annulant en 0, convergeant vers ϕ_0 pour N_∞. La suite de fonctions (f_n) converge donc uniformément vers ϕ_0 sur $[0,1]$ et d'après le théorème d'interversion des limites on a

$$\phi_0(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0 \neq 1.$$

Ceci est une contradiction et donc $\phi_0 \notin \overline{V_0}^\infty$. On a montré que

$$\boxed{V_0 \text{ n'est pas dense dans } C([0,1]) \text{ pour la norme } N_\infty.}$$

Vérifions maintenant que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour N_2. Soient $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon > 0$. On écrit $f = f - f(0)\phi_0 + f(0)\phi_0$ et on approche la fonction constante $f(0)\phi_0$ par un élément de V_0 :
puisque $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$, il existe $h \in V_0$ telle que $N_2(h - \phi_0) < \dfrac{\varepsilon}{|f(0)|+1}$. Posons $g = f - f(0)\phi_0 + f(0)h$. g est dans V_0 et

$$N_2(f-g) = N_2(f(0)(h-\phi_0)) = |f(0)|N_2(\phi_0 - h) \leqslant \frac{|f(0)|\varepsilon}{|f(0)|+1} < \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall f \in C([0,1])$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g \in V_0/\ N_2(f-g) < \varepsilon$ et donc

$$\boxed{V_0 \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour la norme } N_2.}$$

14) 0 est dans V et donc dans $\overline{V}$. Soient $(x,y)\in\overline{V}^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Il existe $((x_n),(y_n))\in(V^{\mathbb{N}})^2$ tel que $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ et $y=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$. Mais alors $(\lambda x_n+\mu y_n)$ est une suite d'éléments de V, convergente de limite $\lambda x+\mu y$ ce qui montre que $\lambda x+\mu y\in\overline{V}$. On a montré que

$$\boxed{\text{Si } V \text{ est un sous-espace vectoriel d'un espace normé, } \overline{V} \text{ est également un espace vectoriel.}}$$

15) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ dense pour N_∞, alors $\forall m\in\mathbb{N}$, $\phi_m\in\overline{V}^\infty$.
Réciproquement, supposons que $\forall m\in\mathbb{N}$ $\phi_m\in\overline{V}^\infty$. Soit $f\in C([0,1])$. Le théorème de WEIERSTRASS permet d'affirmer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$ ou encore convergeant vers f pour N_∞. Mais chaque P_n est une combinaison linéaire de ϕ_m et puisque $\overline{V}^\infty$ est un espace vectoriel d'après la question 14), chaque P_n est élément de $\overline{V}^\infty$.
Ainsi, (P_n) est une suite d'éléments de $\overline{V}^\infty$ convergeant vers f pour N_∞. On en déduit que $f\in\overline{\left(\overline{V}^\infty\right)}^\infty=\overline{V}^\infty$. On a montré que V est dense dans $C([0,1])$ pour N_∞.

$$\boxed{V \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_\infty \text{ si et seulement si } \forall m\in\mathbb{N},\ \phi_m\in\overline{V}^\infty.}$$

16) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ dense pour N_2, alors $\forall m\in\mathbb{N}$, $\phi_m\in\overline{V}^2$.
Réciproquement, supposons que $\forall m\in\mathbb{N}$ $\phi_m\in\overline{V}^2$. Soit $f\in C([0,1])$.
La suite de polynômes (P_n) fournie à la question précédente converge vers f pour N_∞ et donc pour N_2 puisque $N_2\leqslant N_\infty$ d'après la question 11), et chaque P_n est dans $\overline{V}^2$ puisque les ϕ_m sont dans $\overline{V}^2$ qui est un espace vectoriel. Donc $f\in\overline{\left(\overline{V}^2\right)}^2=\overline{V}^2$. On a montré que

$$\boxed{V \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_2 \text{ si et seulement si } \forall m\in\mathbb{N},\ \phi_m\in\overline{V}^2.}$$

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

17)

$$\begin{aligned}\overline{W}^2=C([0,1]) &\Leftrightarrow \forall\mu\in\mathbb{N},\ \phi_\mu\in\overline{W}^2 \text{ (d'après la question 16))}\\ &\Leftrightarrow \forall\mu\in\mathbb{N},\ d(\phi_u,W)=0 \text{ (d'après la question 4))}\\ &\Leftrightarrow \forall\mu\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}d(\phi_\mu,W_n)=0 \text{ (d'après la question 5)).}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{W}^2=C([0,1])\Leftrightarrow\forall\mu\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}d(\phi_\mu,W_n)=0.}$$

18) Soit $\mu\in\mathbb{N}$. D'après la question 10), pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$d(\phi_\mu,W_n)=\sqrt{\frac{G(\phi_{\lambda_0},\dots,\phi_{\lambda_n},\phi_u)}{G(\phi_{\lambda_0},\dots,\phi_{\lambda_n})}}.$$

Maintenant, pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$,

$$(\phi_\alpha|\phi_\beta)=\int_0^1\phi_\alpha(x)\phi_\beta(x)\,dx=\int_0^1x^{\alpha+\beta}\,dx=\frac{1}{\alpha+\beta+1},$$

et donc $G(\phi_{\lambda_0},\dots,\phi_{\lambda_n})$ est le déterminant de CAUCHY associé aux réels $a_k=b_k=\lambda_k+\dfrac{1}{2}$ si $0\leqslant k\leqslant n$ et $G(\phi_{\lambda_0},\dots,\phi_{\lambda_n},\phi_\mu)$ est le déterminant de CAUCHY associé aux réels $a_k=b_k=\lambda_k+\dfrac{1}{2}$ si $0\leqslant k\leqslant n$ et $a_{n+1}=b_{n+1}=\mu+\dfrac{1}{2}$. D'après la question 3)

$$\begin{aligned}d(\phi_\mu,W_n)&=\sqrt{\frac{(a_{n+1}-a_0)\dots(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_0)\dots(b_{n+1}-b_n)}{(a_0+b_{n+1})\dots(a_n+b_{n+1})(a_{n+1}+b_{n+1})(a_{n+1}+b_n)\dots(a_{n+1}+b_0)}}\\ &=\sqrt{\frac{(\mu-\lambda_0)\dots(\mu-\lambda_n)(\mu-\lambda_0)\dots(\mu-\lambda_n)}{(\lambda_0+\mu+1)\dots(\lambda_n+\mu+1)(2\lambda+1)(\mu+\lambda_n+1)\dots(\mu+\lambda_0+1)}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\mu+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \mu \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.}$$

19) Si la suite (λ_k) tend vers $+\infty$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$ tend vers 1.

Réciproquement, supposons que $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right) \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} 1$.

Pour $x \in [0, \mu]$, on a $\dfrac{|x-\mu|}{x+\mu+1} = \dfrac{\mu - x}{x+\mu+1}$. Or, la fonction homographique $x \mapsto \dfrac{\mu - x}{x+\mu+1} = -1 + \dfrac{2\mu+1}{x+\mu+1}$ est décroissante sur $[0, \mu]$ et est donc majorée sur $[0, \mu]$ par sa valeur en 0 à savoir $\dfrac{\mu}{\mu+1}$. Puisque $\dfrac{\mu}{\mu+1} < 1$ et que $\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} 1$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geqslant k_0$, $\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} > \dfrac{\mu}{\mu+1}$ ce qui impose $\lambda_k > \mu$.

Ainsi, pour $k \geqslant k_0$, on a $\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}$. Or, pour $x > \mu$, $\dfrac{x-\mu}{x+\mu+1} = 1 - \dfrac{2\mu+1}{x+\mu+1} < 1$ et donc, si pour $k \geqslant k_0$ on pose $u_k = \dfrac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}$, on a $u_k < 1$ et $\lambda_k = \dfrac{u_k(\mu+1)+\mu}{1-u_k}$. Par hypothèse, $u_k \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} 1^-$ et donc $\lambda_k \underset{k\to+\infty}{+} \infty$.

$$\boxed{\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} 1 \Leftrightarrow \lambda_k \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} +\infty.}$$

20) Par hypothèse faite sur les λ_k au début de l'énoncé, au plus un des λ_k est nul. Notons le λ_{k_0} s'il existe. La phrase « la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente » signifie dans ce cas « $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N},\ k\neq k_0} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$ ».

Si μ est l'un des λ_k, la suite $(d(\phi_\mu, W_n))$ est nulle à partir d'un certain rang et donc tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ que W soit dense dans $C([0,1])$ ou pas. Donc, W est dense dans $C([0,1])$ si et seulement si pour tout entier μ distinct de tous les λ_k, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.

1er cas. Si tout entier μ est un λ_k, d'une part $\forall \mu \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ et d'autre part, $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k} \geq \sum_{\mu\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\mu} = +\infty$. dans ce cas particulier, l'équivalence est établie.

2ème cas. Sinon, l'un au moins des entiers μ est distinct de tous les λ_k. Soit μ un tel réel.

$$\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right) = -\infty$$

Posons $u_k = \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$. On rappelle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 < u_k < 1$ de sorte que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_k) < 0$ et en particulier la suite $(\ln(u_k))$ est de signe constant.

- Si λ_k ne tend pas vers $+\infty$, u_k ne tend pas vers 1 d'après la question 19) puis $\ln(u_k)$ ne tend pas vers 0 et la série de terme général $\ln(u_k)$ est grossièrement divergente. Mais puisque λ_k ne tend pas vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\lambda_k}$ ne tend pas vers 0 et la série de terme général $\dfrac{1}{\lambda_k}$ est grossièrement divergente. Dans ce cas, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = -\infty \Leftrightarrow \sum_k \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$.
- Si λ_k tend vers $+\infty$, u_k tend vers 1 et aussi $|\lambda_k - \mu| = \lambda_k - \mu$ pour k grand. On a alors

$$\ln(u_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} u_k - 1 = \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} - 1 = \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1} - 1 = -\frac{2\mu+1}{\lambda_k + \mu + 1} \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{2\mu+1}{\lambda_k} < 0.$$

Mais alors dans ce cas aussi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = -\infty \Leftrightarrow \sum_k \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$.

En résumé,

$$\overline{W}^2 = C([0,1]) \Leftrightarrow \forall \mu \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ diverge.}$$

$$\boxed{\overline{W}^2 = C([0,1]) \Leftrightarrow \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ diverge.}}$$

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) Si W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞, il en est de même pour la norme N_2 d'après la question 11) et d'après la question précédente $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ diverge.

22) Posons $f = \phi_\mu - \psi$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\int_0^x f'(t)\, dt\right| \leq \int_0^x |f'(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 |f'(t)|\, dt = \int_0^1 1 \times |f'(t)|\, dt \\
&\leqslant \sqrt{\int_0^1 1^2\, dx} \times \sqrt{\int_0^1 f'^2(x)\, dx} \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= N_2(f') = N_2\left(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k\lambda_k\phi_{\lambda_k-1}\right).
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leqslant N_2\left(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k\lambda_k\phi_{\lambda_k-1}\right).}$$

23) Supposons que $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ soit divergente. Soit $\mu \in \mathbb{N}$.

• Si $\mu = 0 = \lambda_0$, $\phi_\mu = \phi_{\lambda_0} \in W \subset \overline{W}^\infty$.

• Sinon, $\mu \geqslant 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\mu_k = \lambda_{k+1} - 1$. Les réels μ_k sont des réels positifs deux à deux distincts et puisque pour tout k sauf peut-être l'un d'entre eux (pour lequel $\mu_k = 0$) $0 < \frac{1}{\lambda_{k+1}} < \frac{1}{\mu_k}$, la série de terme général $\frac{1}{\mu_k}$ est divergente.

D'après la question 20), $W' = \text{Vect}(\phi_{\mu_k})_{k' \in \mathbb{N}}$ est dense dans $C([0,1])$ pour N_2. Mais $\mu\phi_{\mu-1} \in C([0,1])$ et donc pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\gamma = \sum_{k=0}^n b_k\phi_{\mu_k}$ tel que $N_2(\mu\phi_{\mu-1} - \gamma) < \varepsilon$.

Soit $\psi = \sum_{k=0}^n a_k\phi_{\lambda_k}$ où $a_0 = 0$ et $a_k = \frac{b_k}{\lambda_k}$ si $1 \leqslant k \leqslant n$. Ainsi, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = b_k\lambda_k$ et donc

$$\psi' = \sum_{k=0}^n a_k\lambda_k\psi_{\lambda_k-1} = \sum_{k=0}^n a_k\lambda_k\psi_{\mu_k} = \gamma.$$

Mais alors, d'après la question précédente, $N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leqslant N_2(\mu\phi_{\mu-1} - \gamma) < \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \psi \in W/$ $N_\infty(\phi_\mu - \psi) < \varepsilon$ et donc $\phi_\mu \in \overline{W}^\infty$.

Finalement, $\forall \mu \in \mathbb{N}$, $\phi_\mu \in \overline{W}^\infty$. D'après la question 15), W est dense dans $C([0,1])$.

24) Posons $m = \inf_{k\geqslant 1}\lambda_k > 0$. Pour tout entier naturel non nul k, on a $\lambda_k \geqslant m$ et donc $\frac{\lambda_k}{m} \geqslant 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\mu_k = \frac{\lambda_k}{m}$. On a (i) : $\mu_0 = 0$ et (ii) : $\forall k \geqslant 1$, $\mu_k \geqslant 1$. De plus $\sum_k \frac{1}{\mu_k}$ diverge.

D'après la question précédente, $W' = \text{Vect}(\phi_{\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est dense dans $C([0,1])$.

Soient $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon > 0$. Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = f(x^{1/m})$ de sorte que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = g(x^{1/m})$.

Il existe $\gamma \in W'$ tel que $N_\infty(g - \gamma) < \varepsilon$. Pour $x \in [0,1]$, posons $\gamma(x) = \sum_{k=0}^n a_k\phi_{\mu_k}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k/m}$ puis posons $\psi(x) = \gamma(x^m) = \sum_{k=0}^n a_k x^{\lambda_k}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$

$$f(x) - \psi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k} = f((x^m)^{1/m}) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x^m)^{\lambda_k/m} = g(x^m) - \gamma(x^m).$$

Puisque l'application $x \mapsto x^m$ est une bijection de $[0,1]$ sur lui-même, on a

$$N_\infty(f-\psi) = N_\infty(g-\gamma) < \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall f \in C([0,1])$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \psi \in W/\ N_\infty(f-\psi) < \varepsilon$ et encore une fois $\overline{W}^\infty = C([0,1])$.

