SESSION 2009

Concours commun Mines-Ponts

PREMIERE EPREUVE. FILIERE MP

A. Questions préliminaires

1) Soit $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & e^{itx}f(x) \end{array}$.

- Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \Psi(x,t) = e^{itx}f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|\Psi(x,t)| = f(x)$ (car f est une fonction réelle positive) ce qui montre que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \Psi(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (puisque f l'est). On a ainsi montré que la fonction ϕ_f est définie sur $\mathbb{R}$.

- La fonction Ψ admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport à sa deuxième variable t sur $\mathbb{R}^2$ à savoir

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^k \Psi}{\partial t^k}(x,t) = (ix)^k e^{itx} f(x).$$

De plus, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ on a

- pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k \Psi}{\partial t^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k \Psi}{\partial t^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial^k \Psi}{\partial t^k}(x,t)\right| = |x|^k f(x) = \varphi_k(x)$ (hypothèses de domination) où φ_k est par hypothèse continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de Leibniz), la fonction ϕ_f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \phi_f^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^k \Psi}{\partial t^k}(x,t)\,dx = i^k \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x^k f(x)\,dx.$$

$$\boxed{\phi_f \text{ est définie et de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}. \text{ De plus, } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \phi_f^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x^k f(x)\,dx.}$$

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note I l'intervalle $[0,x]$ si $x \geqslant 0$ et $[x,0]$ si $x < 0$. Pour $t \in I$, on pose $f(t) = e^{it}$.
f est n fois dérivable sur I et pour $t \in I$,

$$|f^{(n)}(t)| = |i^n e^{it}| = 1,$$

et donc si pose $M_n = \sup\{|f^{(n)}(t)|,\ t \in I\}$, on a $M_n = 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange permet alors d'écrire

$$\left|e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!}\right| = \left|f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m\right| \leqslant \frac{M_n|x-0|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{n!}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}.}$$

3) $h_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et d'autre part,

$$h_{a,b}(t) \underset{t\to 0,\ t\neq 0}{=} \frac{1}{it}((1-ita)-(1-itb)+o(t)) = b-a+o(1) = h_{a,b}(0)+o(1).$$

Donc $h_{a,b}$ est continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Pour } (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } a<b, \text{ la fonction } h_{a,b} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

4) $|h_{a,b}(0)| = b-a \leqslant b-a$ et pour $t\neq 0$

$$\begin{aligned}|h_{a,b}(t)| &= \frac{1}{|t|}|e^{-ita}-e^{-itb}| = \frac{1}{|t|}|e^{-itb}|\left|e^{it(b-a)}-1\right| = \frac{|e^{it(b-a)}-1|}{|t|}\\ &\leqslant \frac{|t(b-a)|}{|t|} \text{ (d'après la question 3. appliquée à } x=t(b-a) \text{ et } n=1\\ &= b-a.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ |h_{a,b}(t)|\leqslant b-a.}$$

5) Soit $k\in\mathbb{N}$. $e^k = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k^n}{n!} = \frac{e^k}{k!} + \sum_{n\neq k}\frac{k^n}{n!} \geqslant \frac{e^k}{k!}$.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ e^k\geqslant\frac{k^k}{k!}.}$$

B. La fonction ϕ_f caractérise f

6) Soit $(\theta,T)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^+$. La fonction $r\ :\ t\mapsto\frac{\sin(\theta t)}{t}$ est continue sur $[-T,T]\setminus\{0\}$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $r(0)=\theta$. Donc $R(\theta,T)$ existe. De plus, puisque r est paire, en posant $x=\theta t$ de sorte que $\frac{dt}{t}=\frac{dx}{x}$, on obtient

$$R(\theta,T) = \int_{-T}^{T}\frac{\sin(\theta t)}{t}\ dt = 2\int_0^T\frac{\sin(\theta t)}{t}\ dt = 2\int_0^{\theta T}\frac{\sin x}{x}\ dx = 2S(\theta T),$$

ce qui reste vrai pour $\theta=0$ et $T\in\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\forall(\theta,T)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\ R(\theta,T)=2S(\theta T).}$$

7) Pour $u\in\mathbb{R}$, on pose $\text{sgn}(u)=\begin{cases}1 \text{ si } u>0\\ 0 \text{ si } u=0\\ -1 \text{ si } u<0\end{cases}$.

Soient $T\in\mathbb{R}^+_*$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. La fonction S est impaire (primitive qui s'annule en 0 d'une fonction paire) et donc, d'après le rappel de l'énoncé

$$\lim_{T\to+\infty}(R(x,T)-R(y,T)) = 2\lim_{T\to+\infty}(S(xT)-S(yT)) = 2\left(\frac{\pi}{2}\text{sgn}(x)-\frac{\pi}{2}\text{sgn}(y)\right) = \pi(\text{sgn}(x)-\text{sgn}(y)).$$

$$\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \lim_{T\to+\infty}(R(x,T)-R(y,T)) = \pi(\text{sgn}(x)-\text{sgn}(y)).}$$

8) Soient $f\in E$ puis $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Pour $T\in\mathbb{R}$

$$\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)\phi_f(t)\ dt = \int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}}h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)\ dx\right)\ dt = \int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}}H(x,t)\ dx\right)\ dt,$$

où H est la fonction $H\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times[-T,T] & \mapsto & \mathbb{C}\\ (x,t) & \mapsto & h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)\end{array}$.

• Vérifions tout d'abord l'intégrabilité de H sur $\mathbb{R}\times[-T,T]$. La fonction H est continue sur $\mathbb{R}\times[-T,T]$ en vertu de théorèmes généraux (puisque $h_{a,b}$ est continue sur $[-T,T]$ d'après la question 3)). De plus, pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times[-T,T]$,

$$|H(x,t)| = |h_{a,b}(t)|f(x) \leq (b-a)f(x) \quad (*).$$

Comme la fonction positive $(x,t)\mapsto(b-a)f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}\times[-T,T]$ (d'intégrale $2(b-a)T$), la fonction H est intégrable sur $\mathbb{R}\times[-T,T]$.

• Vérifions grâce au théorème de FUBINI que l'on peut permuter les deux symboles d'intégration.

Pour chaque t de $[-T,T]$, la fonction $x\mapsto H(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après $(*)$. De plus, La fonction $t\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)\ dx = h_{a,b}(t)\phi_f(t)$ est continue sur le segment $[-T,T]$ (d'après les questions 1) et 3)) et donc intégrable sur ce segment.

Mais aussi, pour chaque x de $\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto H(x,t)$ est continue sur le segment $[-T,T]$ et donc intégrable sur ce segment. De plus, la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_{[-T,T]} h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)\ dt = f(x)\int_{[-T,T]} h_{a,b}e^{itx}\ dt$ est continue sur $\mathbb{R}$ grâce au théorème de continuité des intégrales à paramètres et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left|f(x)\displaystyle\int_{[-T,T]} h_{a,b}e^{itx}\ dt\right| \leq 2T(b-a)f(x)$.

D'après le théorème de FUBINI, on a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}} h_{a,b}(t)e^{ixt}f(x)\ dx\right)\ dt = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}\times[-T,T]} H(x,t)\ dxdt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)e^{itx}\ dt\right)f(x)\ dx,$$

• Ensuite, pour chaque réel x,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)e^{itx}\ dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\ dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-T}^{T}\frac{\sin((x-a)t)-\sin((x-b)t)}{t}\ dt - i\int_{-T}^{T}\frac{(\cos((x-a)t)-\cos((x-b)t)}{t}\ dt\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin((x-a)t)-\sin((x-b)t)}{t}\ dt = \frac{1}{2\pi}(R(x-a,T)-R(x-b,T)).\end{aligned}$$

car la fonction $t\mapsto\dfrac{(\cos((x-a)t)-\cos((x-b)t)}{t}$ est impaire et intégrable sur $[-T,T]$. En résumé, pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)e^{itx}\ dt\right)f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi}(R(x-a,T)-R(x-b,T))f(x)\ dx.$$

• Vérifions maintenant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi}(R(x-a,n)-R(x-b,n))f(x)\ dx$ existe et vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ grâce au théorème de convergence dominée.

Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $g_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}(R(x-a,n)-R(x-b,n))f(x) = \dfrac{1}{\pi}(S(n(x-a))-S(n(x-b)))f(x)$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ d'après ci-dessus. De plus, d'après 7), la suite de fonction $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2\pi}\times\pi(\text{sgn}(x-a)-\text{sgn}(x-b))f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x\notin[a,b]\\ \frac{1}{2}f(a) \text{ si } x=a\\ \frac{1}{2}f(b) \text{ si } x=b\\ f(x) \text{ si } x\in]a,b]\end{cases}$ qui est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

Enfin, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$, a une limité réelle en $+\infty$ et est impaire. On en déduit que la fonction S est bornée sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$|g_n(x)| \leq \frac{2\|S\|_\infty}{\pi}f(x),$$

la fonction $\dfrac{2\|S\|_\infty}{\pi} f(x)$ étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (et indépendante de n). Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

• Vérifions enfin que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx$. Le travail précédent s'applique en fait en remplaçant n par u_n où (u_n) est une suite quelconque tendant vers $+\infty$. On aboutit au même résultat et donc, pour toute suite (u_n) tend vers $+\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-u_n}^{u_n} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx$ ce qui montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx$.

$$\boxed{\text{Pour } (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } a<b,\ \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt.}$$

9) Soit $(f,g)\in E^2$ tel que $\phi_f=\phi_g$. D'après la question précédente, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$,

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)\ dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_g(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt.$$

On fixe alors $a\in\mathbb{R}$. Ce qui précède fournit : $\forall x\geqslant a$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt = \int_a^x g(t)\ dt$ et en dérivant les deux membres de cette égalité, $\forall x\geqslant a$, $f(x)=g(x)$. Ainsi, $\forall a\in\mathbb{R}$, $f_{/[a,+\infty[} = g_{/[a,+\infty[}$ et finalement $f=g$.

$$\boxed{\forall (f,g)\in E^2,\ \phi_f=\phi_g \Rightarrow f=g.}$$

C. La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

10) f_0 est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$ et tend vers $0=f_0(0)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc la fonction f_0 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou nulles. Ensuite, en posant $u=\ln x$ et donc $du=\dfrac{dx}{x}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(\dfrac{-(\ln x)^2}{2}\right)}{x}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\ du = 1,$$

d'après un résultat admis par l'énoncé.

$$\boxed{f_0\in E.}$$

11) Soit $k\in\mathbb{N}$. La fonction $x\mapsto x^k f_0(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et positive (car f_0 est nulle sur $\mathbb{R}^-$). Son intégrabilité équivaut donc à $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x)\ dx < +\infty$. Or

$$a_k(f_0) = \int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^k\frac{\exp\left(\dfrac{-(\ln x)^2}{2}\right)}{x}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ku-u^2/2}\ du = \exp\left(\frac{k^2}{2}\right),$$

d'après un résultat admis par l'énoncé. En particulier, la fonction $x\mapsto x^k f_0(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f_0 admet des moments de tous ordres et

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ a_k(f_0)=\exp\left(\frac{k^2}{2}\right).}$$

12) Soit $a\in[-1,1]$. La fonction f_a est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_a(x)=\begin{cases} f_0(x)(1+a\sin(2\pi\ln x)) \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x\leqslant 0\end{cases}$.

• f_a est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $x>0$, $|f_a(x)|\leqslant(1+|a|)f_0(x)$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f_a(x)=0=f_a(0)$.

Ainsi, f_a est continue sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle (car pour $x>0$, $a\sin(2\pi\ln x)>-1$). De plus, l'inégalité $|f_a|\leqslant(1+|a|)f_0$ montre que f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ensuite, en posant $u=\ln x$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right)}{x}(1+a\sin(2\pi\ln x))\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}(1+a\sin u)\,du\\ &= 1+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\sin u\, e^{-u^2/2}\,du\\ &= 1 \text{ (car la fonction } u\mapsto \sin u e^{-u^2/2} \text{ est impaire (et intégrable sur } \mathbb{R}))\end{aligned}$$

Ainsi, $f\in E$.

• Plus généralement, pour tout réel x et tout entier naturel k, on a $|x^k f_a(x)|\leqslant(1+|a|)|x|^k f_0(x)$ ce qui montre que f_a admet des moments de tous ordres.
Soit alors $k\in\mathbb{N}$. En posant $u=\ln x$, on obtient

$$\begin{aligned}a_k(f_a)-a_k(f_0) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^k\frac{\exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right)}{x}\sin(2\pi\ln x)\,dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ku-u^2/2}\sin(2\pi u)\,du\\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{(k+2i\pi)u-u^2/2}\,du\right) = a\mathrm{Im}\left(\exp\left(\frac{(k+2i\pi)^2}{2}\right)\right) = a\mathrm{Im}\left(\exp\left(\frac{k^2-4\pi^2}{2}+2ik\pi\right)\right)\\ &= a\mathrm{Im}\left(\exp\left(\frac{k^2-4\pi^2}{2}\right)\right)=0.\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{f_a\in E \text{ et } \forall k\in\mathbb{N},\ a_k(f_0)=a_k(f_a).}$$

En particulier, la suite des moments $(a_k(f))$ ne caractérise pas la fonction f.

D. Une condition sur la suite $a_k(f)$

13) Soit $k\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(b_{2k+1}(f))^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}}|x|^{2k+1}f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}}|x|^k\sqrt{f(x)}\times|x|^{k+1}\sqrt{f(x)}\,dx\right)^2\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}}|x|^{2k}f(x)\,dx\right)\times\left(\int_{\mathbb{R}}|x|^{2k+2}f(x)\,dx\right) \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}}x^{2k}f(x)\,dx\right)\times\left(\int_{\mathbb{R}}x^{2k+2}f(x)\,dx\right) = a_{2k}(f)a_{2k+2}(f).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N} \text{ et } \forall k\in\mathbb{N},\ (b_{2k+1}(f))^2\leqslant a_{2k}(f)a_{2k+2}(f).}$$

14) Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

• Si k est pair, posons $k=2p$, $p\in\mathbb{N}^*$. $\dfrac{b_k(f)^{\frac{1}{k}}}{k}=\dfrac{b_{2p}(f)^{\frac{1}{2p}}}{2p}=\dfrac{a_{2p}(f)^{\frac{1}{2p}}}{2p}\leqslant M\leqslant 2M$.

• Si k est impair, posons $k=2p+1$, $p\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente

$$\begin{aligned}\frac{b_{2p+1}(f)^{\frac{1}{2p+1}}}{2p+1} &\leqslant \frac{\sqrt{a_{2p}(f)a_{2p+2}(f)}^{\frac{1}{2p+1}}}{2p+1}\leqslant\frac{\left((2pM)^{2p}((2p+2)M)^{2p+2}\right)^{\frac{1}{2(2p+1)}}}{2p+1}\\ &= 2M\times\frac{p^{\frac{p}{2p+1}}(p+1)^{\frac{p+1}{2p+1}}}{2p+1} = 2M\times\left(\frac{p}{2p+1}\right)^{\frac{p}{2p+1}}\left(\frac{p+1}{2p+1}\right)^{\frac{p+1}{2p+1}}\\ &\leqslant 2M\times 1\times 1=2M.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{b_k(f)^{\frac{1}{k}}}{k} \leqslant 2M.}$$

15) Soit $(x,h) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1), ϕ_f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$|\phi_n(t)| = \left| i^k \int_{\mathbb{R}} e^{itx} x^n f(x)\ dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |x|^n f(x)\ dx = b_n(f).$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a alors

$$\boxed{\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x) \right| \leqslant \frac{|h|^n}{n!} b_n(f).}$$

16) Montrons qu'il existe $A > 0$ tel que, pour $h \in [-A, A]$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|h|^n}{n!} b_n(f) = 0$.

Soit $(h,n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$. D'après les questions 14) et 5),

$$\frac{|h|^n}{n!} b_n(f) \leqslant \frac{(2|h|M)^n n^n}{n!} \leq (2|h|Me)^n.$$

Par suite, si $|h| < \frac{1}{2Me}$, alors $2|h|Me < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (2|h|Me)^n = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|h|^n}{n!} b_n(f) = 0$.

Mais alors, si $h \in \left] -\frac{1}{2Me}, \frac{1}{2Me} \right[$ et $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 15), $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x) = \phi_f(x+h)$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \left] -\frac{1}{2Me}, \frac{1}{2Me} \right[,\ \phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(x).}$$

17) Puisque les suites $(a_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(a_k(g))_{k \in \mathbb{N}}$ sont égales, ce qui précède s'applique à la fonction g : les coefficients $a_k(g)$ vérifient la propriété $(\mathbf{U})$ avec le même réel M et pour tout réel x et tout $h \in]-A, A[$, $\phi_g(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \phi_g^{(m)}(x)$ (mais on n'a pas nécessairement $b_k(f) = b_k(g)$).

Montrons alors par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}^*$ que $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \left[-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2} \right]$, $\phi_f(x) = \phi_g(x)$.

- Pour $\ell = 1$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la question 1) on a

$$\phi_f^{(k)}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\ dx = i^k a_k(f) = i^k a_k(g) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k g(x)\ dx \phi_g^{(k)}(0).$$

Mais alors, d'après la question 16) appliquée à $x = 0$, pour $h \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right] \subset]-A, A[$,

$$\phi_f(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \phi_f^{(m)}(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \phi_g^{(m)}(0) = \phi_g(h),$$

ce qui établit le résultat pour $\ell = 1$.

- Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\forall x \in \left[-\frac{\ell A}{2} \frac{\ell A}{2} \right]$, $\phi_f(x) = \phi_g(x)$. Soit $x \in \left[-\frac{(\ell+1)A}{2}, -\frac{\ell A}{2} \right[\cup \left] \frac{\ell A}{2}, \frac{(\ell+1)A}{2} \right]$. Il existe $h \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right] \subset]-A, A[$ tel que $x - h \in \left[-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2} \right]$.

Par hypothèse de récurrence et d'après la question 16), on a

$$\phi_f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x-h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} g^{(m)}(x-h) = \phi_g(x).$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[-\frac{\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}\right],\ \phi_f(x) = \phi_g(x).}$$

18) Mais alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_f(x) = \phi_g(x)$. Mais alors d'après la question 9), on a $f = g$. Dans ce cas particulier, la suite des coefficients $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ caractérise f.

E. Application

19) Soit f une éventuelle solution. Puisque $f \in E$, $a_0(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$

• Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on doit avoir

$$a_{2k}(f) = (2k-1)(2k-3)\times 3 \times 1 \times a_0(f) = \frac{(2k)\times(2k-1)\times(2k-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{(2k)\times(2k-2)\times\ldots\times 4\times 2} = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

• Montrons que la suite $a_k(f)$ vérifié la propriété (U). D'après la formule de Stirling, on a

$$\begin{aligned}\frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} &= \frac{1}{2k}\left(\frac{(2k)!}{2^k k!}\right)^{\frac{1}{2k}}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}\left(\frac{\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\sqrt{4\pi k}}{2^k\left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{2\pi k}}\right)^{\frac{1}{2k}} = \frac{\sqrt{2}\times 2^{-1/4k}\times\sqrt{k}}{2k\times\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2ke}}.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\left(\dfrac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k}\right)$ tend vers 0 et en particulier a suite $\left(\dfrac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k}\right)$ est bornée. Donc la suite $(a_k(f))$ vérifie la propriété (U) ce qui assure l'unicité de f d'après la question 18).

• Toujours nécessairement, d'après la question 16), il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in]-A, A[$,

$$\begin{aligned}\phi_f(x) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\phi_f^{(m)}(0)\frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} i^m a_m(f)x^m = \sum_{k=0}^{+\infty} i^{2k}\frac{(2k)!}{2^k k!}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-x^2/2)^k}{k!} = e^{-x^2/2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(itx - \frac{t^2}{2}\right)\,dt \text{ (d'après un résultat admis par l'énoncé).}\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons alors $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}2$ de sorte que pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi_g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\exp\left(itx - \frac{t^2}{2}\right)\,dt$.
La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle, intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1. Par suite, la fonction g est dans E.
Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x^k g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc la fonction g admet des moments de tous ordres.
La fonction ϕ_g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1) et $\forall m \in \mathbb{N}$, $a_m(g) = \dfrac{1}{i^m}\phi_g^{(m)}(0)$. Mais $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_g(x) = e^{-x^2/2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-x^2/2)^k}{k!}.$$

Les coefficients de ce développement en série entière fournissent les $\phi_g^{(m)}(0)$ et donc les $a_m(g)$. Les $a_{2m+1}(g)$ sont nuls et pour $m \in \mathbb{N}$

$$a_{2m}(g) = \frac{1}{i^{2m}}\times\frac{(-2)^m}{m!}\times(2m)! = \frac{(2m)!}{2^m m!}.$$

La fonction g est donc solution du problème.

Le problème posé admet une et une seule solution, la fonction f définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

