SESSION 2008

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIEME EPREUVE. FILIERE PC

I Stabilité d'un polynôme trigonométrique

1. • Soit $c \in E$. La somme $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Donc $\|c\|$ existe et $\|c\| \in \mathbb{R}^+$.

• Soit $c \in E \setminus \{0\}$. L'un au moins des c_n n'est pas nul et donc $\|c\| > 0$. Par contraposition, $\forall c \in E,\ (\|c\| = 0 \Rightarrow c = 0)$.
• Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $c \in E$.

$$\|\lambda c\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda c_n| = |\lambda| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = |\lambda|\|c\|.$$

• Soit enfin $(c, c') \in E^2$.

$$\|c + c'\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n + c'_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c'_n| = \|c\| + \|c'\|.$$

On a montré que

$$\boxed{\|\ \| \text{ est une norme sur } E.}$$

2. Soient n et p deux entiers relatifs.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-ipx}\,dx = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx \text{ si } n = p \\ \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{e^{i(n-p)x}}{i(n-p)}\right]_{-\pi}^{\pi} \text{ si } n \neq p \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } n = p \\ 0 \text{ si } n \neq p \end{array}\right. = \delta_{n,p},$$

où $\delta_{n,p}$ désigne le symbole de Kronecker.

Soient alors $c \in E$ et $p \in \{-\deg c, \ldots, \deg c\}$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c(x)e^{-ipx}\,dx = \sum_{n=-\deg c}^{\deg c} c_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)x}\,dx = \sum_{n=-\deg c}^{\deg c} c_n\delta_{n,p} = c_p.$$

$$\boxed{\forall c \in E,\ \forall p \in \{-\deg c, \ldots, \deg c\},\ c_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c(x)e^{-ipx}\,dx.}$$

3. Soit $c \in E$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|c(x)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n e^{inx}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = \|c\|.$$

Donc $\|c\|$ est un majorant de la fonction $|c|$ sur $\mathbb{R}$ et on en déduit que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |c(x)| \leq \|c\|$.

• Pour tout $n \in \{-\deg c, \deg c\}$.

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} c(x)e^{-inx}\,dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |c(x)e^{-inx}|\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |c(x)|\,dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |c(t)|\right)\,dx = \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |c(t)|\right),$$

et donc

$$\|c\| = \sum_{n=-\deg c}^{\deg c} |c_n| \leq \sum_{n=-\deg c}^{\deg c} \sup_{t\in\mathbb{R}} |c(t)| = (2\deg c + 1)\sup_{t\in\mathbb{R}} |c(t)|.$$

$$\boxed{\forall c \in E,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |c(x)| \leq \|c\| \leq (2\deg c + 1)\sup_{t\in\mathbb{R}} |c(t)|.}$$

4. Soit $c \in E$. Pour tout entier naturel k, c^k est dans E et donc

$$|c(x_0)|^k = |c^k(x_0)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |c^k(x)| \leq \|c^k\|,$$

et comme $|c(x_0)|^k$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, il en est de même de $\|c^k\|$. Dans ce cas, c n'est pas stable.

II Un polynôme trigonométrique particulier

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|a(x)|^2 &= (\alpha^2\cos x + 1 - \alpha^2)^2 + (\alpha\sin x)^2 = \left(\alpha^2(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}) + 1 - \alpha^2\right)^2 + \left(2\alpha\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2 \\
&= \left(1 - 2\alpha^2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2 + 4\alpha^2\sin^2\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 4\alpha^2\sin^2\frac{x}{2} + 4\alpha^4\sin^4\frac{x}{2} + 4\alpha^2\sin^2\frac{x}{2} - 4\alpha^4\sin^2\frac{x}{2} \\
&= 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4)\sin^4\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |a(x)|^2 = 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4)\sin^4\frac{x}{2}.}$$

$a(0) = \alpha^2 + 1 - \alpha^2 = 1$.
Soit $x \in]0, \pi]$. Alors, $\frac{x}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\sin^4\frac{x}{2} \in]0, 1]$.
D'autre part, $\alpha \in]0, 1[$ et donc $\alpha^2 - \alpha^4 = \frac{1}{4} - (\alpha^2 - \frac{1}{2})^2 \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ puis $4(\alpha^2 - \alpha^4)\sin^4\frac{x}{2} \in]0, 1]$ et finalement $|a(x)|^2 = 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4)\sin^4\frac{x}{2} \in [0, 1[$. On en déduit que $|a(x)| < 1$.

$$\boxed{a(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]0, \pi],\ |a(x)| < 1.}$$

6. Quand x tend vers 0,

$$g(x) = \ln\left(1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4)\sin^4\frac{x}{2}\right) = \ln\left(1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4)\frac{x^4}{16} + o(x^4)\right) = -4(\alpha^2 - \alpha^4)\frac{x^4}{16} + o(x^4) = -\frac{\alpha^2 - \alpha^4}{4}x^4 + o(x^4),$$

et

$$\begin{aligned}
h(x) &= \mathrm{Arctan}(-\alpha\sin x/(\alpha^2\cos x + 1 - \alpha^2)) = \mathrm{Arctan}\left(-\alpha\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{\alpha^2x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1}\right) \\
&= \mathrm{Arctan}\left(-\alpha\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{\alpha^2x^2}{2} + o(x^3)\right)\right) = \mathrm{Arctan}\left(-\alpha x + \frac{\alpha - 3\alpha^3}{6}x^3 + o(x^4)\right) \\
&= -\alpha x + \frac{\alpha - 3\alpha^3}{6}x^3 - \frac{(-\alpha x)^3}{3} + o(x^4) \\
&= -\alpha x + \frac{\alpha - \alpha^3}{6}x^3 + o(x^4).
\end{aligned}$$

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{\alpha^2-\alpha^4}{4}x^4 + o(x^4) \text{ et } h(x) \underset{x\to 0}{=} -\alpha x + \frac{\alpha-\alpha^3}{6}x^3 + o(x^4).}$$

7. Quand x tend vers 0, $\Re(a(x))$ tend vers 1. En particulier, pour x au voisinage de 0, on a $\Re(a(x)) > 0$ et $(a(x)$ admet un argument dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On peut donc prendre $h(x)$ pour argument de $a(x)$ quand x tend vers 0 et on a

$$a(x) = |a(x)|e^{i\arg(a(x))} = \exp\left(\frac{1}{2}g(x) + ih(x)\right) = \exp\left(-i\alpha x + i\frac{\alpha-\alpha^3}{6}x^3 - \frac{\alpha^2-\alpha^4}{8}x^4 + o(x^4)\right).$$

$$\boxed{a(x) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(-i\alpha x + i\frac{\alpha-\alpha^3}{6}x^3 - \frac{\alpha^2-\alpha^4}{8}x^4 + o(x^4)\right).}$$

III Majoration des coefficients de a^k

8.

$$\left|\int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}\ dt\right| = \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}\ dt = -\frac{1}{f'(s)} + \frac{1}{f'(r)} \leq \left|\frac{1}{f'(s)}\right| + \left|\frac{1}{f'(r)}\right| = \frac{1}{|f'(s)|} + \frac{1}{|f'(r)|} \leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = \frac{2}{K}.$$

9. La fonction f' ne s'annule pas sur $[r, s]$ et donc $\frac{1}{f'}$ est de classe C^1 sur $[r, s]$. Comme les fonctions $\frac{1}{f'}$ et $\sin\circ f$ sont de classe C^1 sur $[r, s]$, on peut effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_r^s \cos(f(t))\ dt &= \int_r^s \frac{1}{f'(t)}\left(f'(t)\cos(f(t))\right)\ dt = \left[\frac{\sin(f(t))}{f'(t)}\right]_r^s - \int_r^s \frac{-f''(t)}{(f'(t))^2}\sin(f(t))\ dt \\ &= \frac{\sin(f(s))}{f'(s)} - \frac{\sin(f(r))}{f'(r)} + \int_r^s \frac{f''(t)\sin(f(t))}{(f'(t))^2}\ dt.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\left|\int_r^s \cos(f(t))\ dt\right| &\leq \frac{|\sin(f(s))|}{|f'(s)|} + \frac{|\sin(f(r))|}{|f'(r)|} + \int_r^s \frac{f''(t)|\sin(f(t))|}{(f'(t))^2}\ dt \leq \frac{1}{|f'(s)|} + \frac{1}{|f'(r)|} + \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2}\ dt \\ &\leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K} + \frac{2}{K} = \frac{4}{K}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\left|\int_r^s \cos(f(t))\ dt\right| \leq \frac{4}{K}.}$$

10. On suppose que $u + \frac{2}{\sqrt{M}} < v$.

f'' est positive sur $[u, v]$ et donc f' est croissante sur $[u, v]$. Soit alors $t \in \left[u + \frac{2}{\sqrt{M}}, v\right]$.

$$f'(t) \geq f'\left(u + \frac{2}{\sqrt{M}}\right) = f'(u) + \int_u^{u+2/\sqrt{M}} f''(x)\ dx \geq 0 + \int_u^{u+2/\sqrt{M}} M\ dx = \frac{2}{\sqrt{M}} \times M = 2\sqrt{M}.$$

11. Si $u + \frac{2}{\sqrt{M}} \geq v$ ou encore si $v - u \leq \frac{2}{\sqrt{M}}$, on a $\left|\int_u^v \cos(f(t))\ dt\right| \leq \int_u^v |\cos(f(t))|\ dt \leq (v-u)\times 1 \leq \frac{2}{\sqrt{M}} \leq \frac{4}{\sqrt{M}}$.

Sinon, sur $\left[u + \frac{2}{\sqrt{M}}\right]$, f vérifie les hypothèses des questions 8. et 9. avec $K = 2\sqrt{M}$. On en déduit que

$$\left|\int_u^v \cos(f(t))\ dt\right| \leq \int_u^{u+2/\sqrt{M}} 1\ dt + \left|\int_{u+2/\sqrt{M}}^v \cos(f(t))\ dt\right| \leq \frac{2}{\sqrt{M}} + \frac{4}{2\sqrt{M}} = \frac{4}{\sqrt{M}}.$$

12. f' est continue et strictement croissante sur $[u, v]$ (car $f'' > 0$ sur $[u, v]$) et $f'(u)f'(v) < 0$. Donc f' s'annule une et une seule fois sur $[u, v]$ en certain certain réel w de $[u, v]$.
On applique alors le résultat des questions 10. et 11. sur $[u, w]$ et $[w, v]$ et on obtient

$$\left|\int_u^v \cos(f(t))\ dt\right| \leq \left|\int_u^w \cos(f(t))\ dt\right| + \left|\int_w^v \cos(f(t))\ dt\right| \leq \frac{4}{\sqrt{M}} + \frac{4}{\sqrt{M}} = \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

13. Soit $x \in [k^{-1/3}, \pi]$. Pour $t \in [0, \pi]$, on pose $f(t) = \zeta t + k\beta t^3$. f est de classe C^2 sur $[0, \pi]$ et pour $t \in [0, \pi]$, $f''(t) = 6k\beta t$. Sur $[k^{-1/3}, x] \subset [k^{-1/3}, \pi]$, f'' est minorée par le réel $M = 6k^{2/3}\beta > 0$.
D'après les questions 11. et 12., dans tous les cas on a

$$\left|\int_{k^{-1/3}}^x \cos(f(t))\ dt\right| \leq \frac{8}{\sqrt{M}} = \frac{8}{\sqrt{6k^{2/3}\beta}} = \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}.$$

14. Soit $x \in [0, \pi]$. Si $x \in]k^{-1/3}, \pi]$, on a

$$\left|\int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3)\ dt\right| \leq \int_0^{k^{-1/3}} dt + \left|\int_{k^{-1/3}}^x \cos(\zeta t + k\beta t^3)\ dt\right| \leq k^{-1/3} + \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}} = \left(1 + \frac{8}{\sqrt{6\beta}}\right) k^{-1/3}.$$

Si $x \in [0, k^{-1/3}]$, on a

$$\left|\int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3)\ dt\right| \leq \int_0^x dt \leq \int_0^{k^{-1/3}} dt = k^{-1/3} \leq \left(1 + \frac{8}{\sqrt{6\beta}}\right) k^{-1/3}.$$

Donc

$$\boxed{\exists C_1 > 0/\ \forall x \in [0, \pi],\ \forall \zeta \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3)\ dt\right| \leq C_1 k^{-1/3}.}$$

15. D'après la question 5., pour tout $x \in]0, \pi]$, $|b(x)| = |a(x)| < 1$. Ceci est encore encore vrai pour tout $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ par parité et donc pour $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$,

$$1 + \Re(\varepsilon(x)) = \frac{\ln(|b(x)|)}{-\gamma x^4} > 0.$$

D'autre part, puisque ε est continue en 0 et tend vers 0 quand x tend vers 0, $1 + \Re(\varepsilon(0)) = 1 > 0$.
Ainsi, la fonction $1 + \Re(\varepsilon)$ est strictement positive sur le segment $[-\pi, \pi]$. En particulier, puisque la fonction $1 + \Re(\varepsilon)$ est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$, la fonction $1 + \Re(\varepsilon)$ admet un minimum $m > 0$ sur ce segment. Soit $\lambda = \gamma m > 0$. Alors, pour tout réel $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|b(x)| = e^{-\gamma x^4(1+\Re(\varepsilon(x)))} \leq e^{-\gamma x^4 m} = e^{-\lambda x^4}.$$

$$\boxed{\exists \lambda > 0/\ \forall x \in [-\pi, \pi],\ |b(x)| \leq e^{-\lambda x^4}.}$$

16. La fonction ε est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$. Il en est de même de la fonction b et pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$b'(x) = -\gamma(4(1 + \varepsilon(x)) + x\varepsilon'(x))x^3 b(x).$$

La fonction $x \mapsto -\gamma(4(1 + \varepsilon(x)) + x\varepsilon'(x))b(x)$ est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et donc bornée sur ce segment. Soit $C_3 > 0$ un majorant de la fonction $x \mapsto |-\gamma(4(1+\varepsilon(x))+x\varepsilon'(x))b(x)|$ sur $[-\pi, \pi]$. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a $|b'(x)| \leq C_3 \left|x^3\right|$.

$$\boxed{\exists C_3 > 0/\ \forall x \in [-\pi, \pi],\ |b'(x)| \leq C_3|x^3|.}$$

17. Soient $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$. Posons $\zeta = -(\alpha k + n)$ (erreur probable d'énoncé au vu des questions qui suivent). La fonction $t \mapsto \cos(\zeta t + k\beta t^3)$ est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ et donc la fonction $J_{k,\zeta}$ est de classe C^1 sur le segment $[-\pi, \pi]$. De même, la fonction b^k est de classe C^1 sur le segment $[-\pi, \pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\zeta}(x)(b(x))^k\ dx = \left[J_{k,\zeta}(x)(b(x))^k\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} J_{k,\zeta}(x)kb'(x)(b(x))^{k-1}\ dx.$$

La fonction $J_{k,\zeta}$ est impaire et d'après les questions 5. et 14.

$$\left|\left[J_{k,\zeta}(x)(b(x))^k\right]_{-\pi}^{\pi}\right| \leq \left|J_{k,\zeta}(\pi)(b(\pi))^k\right| + \left|J_{k,\zeta}(-\pi)(b(-\pi))^k\right| \leq C_1k^{-1/3}\times 1 + C_1k^{-1/3}\times 1 = 2C_1k^{-1/3}.$$

D'autre part, d'après les questions 15. et 16., pour $k \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} J_{k,\zeta}(x)kb'(x)(b(x))^{k-1}\,dx\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} k|J_{k,\zeta}(x)||b'(x)||b(x)|^{k-1}\,dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} C_1k^{-1/3}C_3|x^3|e^{-\lambda(k-1)x^4}\,dx\\ &= 2C_1C_3k^{-1/3}\int_0^{\pi} kx^3e^{-\lambda(k-1)x^4}\,dx = 2C_1C_3k^{-1/3}\frac{k}{4\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda(k-1)\pi}).\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{k}{4\lambda(k-1)} = \dfrac{k-1+1}{4\lambda(k-1)} = \dfrac{1}{4\lambda} + \dfrac{1}{4\lambda(k-1)} \leq 2\times\dfrac{1}{4\lambda} = \dfrac{1}{2\lambda}$ et donc pour $k \geq 2$,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} J_{k,\zeta}(x)kb'(x)(b(x))^{k-1}\,dx\right| \leq 2C_1C_3k^{-1/3}\times\frac{1}{2\lambda}\times 1 = \frac{C_1C_3}{\lambda}k^{-1/3},$$

puis

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\zeta}(x)(b(x))^k\,dx\right| \leq \left(2C_1 + \frac{C_1C_3}{\lambda}\right)k^{-1/3} = C'_4k^{-1/3}.$$

Pour $k = 1$, on a $\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_{k,\zeta}(x)kb'(x)(b(x))^{k-1}\,dx\right| = \left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J_{1,\alpha+n}(x)b'(x)\,dx\right| \leq 2\displaystyle\int_0^{\pi} C_1C_3x^3\,dx = \dfrac{C_1C_3\pi^4}{2}$ et donc $\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J'_{1,\alpha+n}(x)(b(x))^k\,dx\right| \leq \left(2C_1 + \dfrac{C_1C_3\pi^4}{2}\right)1^{-1/3}$.

En posant $C_4 = \text{Max}\left\{C'_4, 2C_1 + \dfrac{C_1C_3\pi^4}{2}\right\}$ on a $\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\zeta}(x)(b(x))^k\,dx\right| \leq C_4k^{-1/3}$ pour $k \geq 1$.

$$\boxed{\exists C_4 > 0/\ \forall (k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z},\ \left|\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,-(\alpha k+n)}(x)(b(x))^k\,dx\right| \leq C_4k^{-1/3}.}$$

18. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ puis $n \in [\![-k,k]\!]$.

$$\begin{aligned}a_{k,n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a^k(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d^k(x)b^k(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-(\alpha k+n)x+k\beta x^3)}(b(x))^k\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(-(\alpha k+n)x+k\beta x^3))(b(x))^k\,dx + \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(-(\alpha k+n)x+k\beta x^3))(b(x))^k\,dx\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question précédente

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(-(\alpha k+n)x+k\beta x^3))(b(x))^k\,dx\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,-(\alpha k+n)}(x)(b(x))^k\,dx\right| \leq \frac{C_4}{2\pi}k^{-1/3}.$$

De même, d'après le résultat admis de la fin de la question 14., il existe $D_4 > 0$ indépendant de k et de n tel que

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(-(\alpha k+n)x+k\beta x^3))(b(x))^k\,dx\right| \leq \frac{D_4}{2\pi}k^{-1/3}.$$

Mais alors $|a_{k,n}| \leq \dfrac{C_4+D_4}{2\pi}k^{-1/3} = C_5k^{-1/3}$.

$$\boxed{\exists C_5 > 0/\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in[\![-k,k]\!],\ |a_{k,n}| \leq C_5k^{-1/3}.}$$

19. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La formule de Parseval fournit

$$\sum_{n=-k}^{k}|a_{k,n}|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|a^k(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|a(x)|^{2k}\,dx \geq \frac{C_6}{2\pi}k^{-1/4}.$$

Mais on a aussi

$$\sum_{n=-k}^{k} |a_{k,n}|^2 = \sum_{n=-k}^{k} |a_{k,n}| \times |a_{k,n}| \leq C_5 k^{-1/3} \sum_{n=-k}^{k} |a_{k,n}|.$$

Par suite,

$$\|a^k\| = \sum_{n=-k}^{k} |a_{k,n}| \geq \frac{C_6/2\pi k^{-1/4}}{C_5 k^{-1/3}} = \frac{C_6}{2\pi C_5} k^{1/12}.$$

Donc

$$\boxed{\exists C_7 > 0/\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|a^k\| \geq C_7 k^{1/12}.}$$

