SESSION 2008

Concours commun Mines-Ponts

PREMIERE EPREUVE. FILIERE PC

I Préliminaires

1. On note tout d'abord que les polynômes L_i, $0 \leq i \leq n$, sont de degré n et en particulier sont dans $\mathbb{C}_n[X]$. On note aussi que $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Montrons alors que la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est libre.

Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = 0$$
$$\Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \lambda_j = 0.$$

Ainsi, la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$. Comme de plus, $\mathrm{card}((L_i)_{0\leq i\leq n}) = n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X]) < +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (L_i)_{0\leq i\leq n} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X].}$$

2. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]$. Puisque la famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, il existe une famille $(\lambda_{k,j})_{0\leq k,j\leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ telle que $X^j = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_{k,j} L_k$. En évaluant en a_i, on obtient

$$a_i^j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{k,j} L_k(a_i) = \lambda_{i,j}.$$

On a ainsi montré que

$$\boxed{\forall j \in [\![0,n]\!],\ X^j = \sum_{i=0}^{n} a_i^j L_i.}$$

On en déduit encore que

$$\boxed{\text{la matrice de la famille } (X^j)_{0\leq j\leq n} \text{ dans la base } (L_i)_{0\leq i\leq n} \text{ est la matrice de Vandermonde } (a_i^j)_{0\leq i,j\leq n}.}$$

II Fonctions polynomiales

3. Soit $j \in [\![0,k]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton

$$t_a(X^j) = (X+a)^j = \sum_{i=0}^{j} C_j^i a^{j-i} X^i.$$

et

$$d(X^j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j = 0 \\ jx^{j-1} \text{ si } j \geq 1 \end{cases}.$$

Donc

$$\boxed{T_a = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 a & C_2^0 a^2 & \dots & \dots & C_k^0 a^k \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 a & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & C_2^2 & & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & C_k^{k-1} a \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & C_k^k \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & k \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}.}$$

4. Les matrices T_a et D sont triangulaires supérieures. Les valeurs propres de ces matrices sont donc leurs coefficients diagonaux.

$$\boxed{t_a \text{ admet } 1 \text{ pour valeur propre d'ordre } k+1 \text{ et } d \text{ admet } 0 \text{ pour valeur propre d'ordre } k+1.}$$

La matrice $T_a - I_{k+1}$ est $\begin{pmatrix} 0 & C_1^0 a & C_2^0 a^2 & \dots & \dots & C_k^0 a^k \\ 0 & 0 & C_2^1 a & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & C_k^{k-1} a \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La première colonne et la dernière ligne de cette matrice sont nulles. Elle a donc même rang que la matrice $\begin{pmatrix} C_1^0 a & C_2^0 a^2 & \dots & \dots & C_k^0 a^k \\ 0 & C_2^1 a & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & C_k^{k-1} a \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls (car $a \in \mathbb{C}^*$) et est donc inversible. On en déduit que son rang est son format à savoir k. Ainsi, $\text{rg}(T_a - Id_{k+1}) = k$ et d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(t_a - Id_{\mathbb{C}_k[X]})) = (k+1) - k = 1$. $\text{Ker}(t_a - Id_{\mathbb{C}_k[X]})$ est donc une droite vectorielle. Comme le polynôme 1 est dans $\text{Ker}(t_a - Id_{\mathbb{C}_k[X]})$, on en déduit que $\text{Ker}(t_a - Id_{\mathbb{C}_k[X]}) = \text{Vect}(1) = \mathbb{C}_0[X]$.

De même, la matrice D est de rang k et donc $\text{Ker}(d)$ est une droite vectorielle. Comme le polynôme 1 est dans $\text{Ker}(d)$, on a aussi $\text{Ker}(d) = \text{Vect}(1) = \mathbb{C}_0[X]$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } t_a \text{ (resp. } d\text{) associé à la valeur propre } 1 \text{ (resp. } 0\text{) est } \mathbb{C}_0[X] \text{ qui est de dimension } 1.}$$

5. Soit F un sous-espace non nul de E, stable par d. Soit $n \in [\![0, k]\!]$ le degré maximum d'un polynôme de F. On a donc $F \subset \mathbb{C}_n[X]$.
Soit P un élément de F de degré n. Puisque F est stable par d, les polynômes P, P', ..., $P^{(n)}$ sont encore dans F puis $\text{Vect}(P^{(i)})_{0 \leq i \leq n} \subset F$. Maintenant, ces polynômes sont $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{C}_n[X]$, de degrés échelonnés. On sait alors que la famille $(P^{(i)})_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc $\mathbb{C}_n[X] = \text{Vect}(P^{(i)})_{0 \leq i \leq n} \subset F$.

Finalement, un sous-espace non nul de $\mathbb{C}_k[X]$ stable par d est nécessairement l'un des sous-espaces $\mathbb{C}_0[X]$, $\mathbb{C}_1[X]$, ..., $\mathbb{C}_k[X]$. Réciproquement, chacun de ces sous-espaces est effectivement stable par d et donc en récupérant le sous-espace nul,

$$\boxed{\text{les sous-espaces de } \mathbb{C}_k[X] \text{ stable par } d \text{ sont } \{0\}, \mathbb{C}_0[X], \mathbb{C}_1[X], \dots, \mathbb{C}_k[X].}$$

6. Pour $i \in [\![0, k]\!]$, on pose $P_i = \dfrac{d^i(P)}{i!}$. Les polynômes P_i, $0 \leq i \leq k$ sont $k+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{C}_k[X]$ de degrés échelonnés. On sait alors que la famille $P_i)_{0 \leq i \leq k}$ est une base de $\mathbb{C}_k[X]$.

Soit $j \in [\![0,k]\!]$.

$$P_j = \left(\sum_{i=0}^{k} p_i X^i\right)^{(j)} = \sum_{i=j}^{k} p_i \left(X^i\right)^{(j)} = \sum_{i=j}^{k} p_i \frac{i!}{(i-j)!} X^{i-j} = \sum_{i=0}^{k-j} p_{i+j} \frac{(i+j)!}{i!} X^i,$$

et donc

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & 2\times 1 p_2 & \dots & \dots & (k-1)!p_{k-1} & k!p_k \\ p_1 & 2p_2 & 3\times 2p_3 & & & \frac{k!}{1!}p_k & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & (k-1)p_{k-1} & k(k-1)p_k & & & & \\ p_{k-1} & kp_k & 0 & & & & \vdots \\ p_k & 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}.}$$

En développant suivant chaque dernière colonne, on obtient $|\det(R)| = k! \times \dfrac{k!}{1!} \times \dfrac{k!}{2!} \times \dots \times \dfrac{k!}{(k-1)!} \times \dfrac{k!}{k!} \times p_k^{k+1} \neq 0$ et on retrouve le fait que la famille $\left(\dfrac{d^j(P)}{j!}\right)_{0\leq j\leq k}$ est une base de $\mathbb{C}_k[X]$.

7. Pour $i \in [\![0,k]\!]$, on pose $Q_i = P(X+ia) = t_a^i(P)$. Soit $j \in [\![0,k]\!]$. La formule de Taylor fournit

$$Q_j = P(X+ja) = \sum_{i=0}^{k} \frac{P^{(i)}(X)}{i!}(ja)^i = \sum_{i=0}^{k} (ja)^i P_i$$

Calculons alors le déterminant de U.

$$\begin{aligned} \det(U) &= \det((ja)^i)_{0\leq i,j\leq k} \\ &= a^0 \times a^1 \times \dots \times a^k \det(j^i)_{0\leq i,j\leq k} \text{ (par linéarité par rapport à chaque ligne)} \\ &= a^{k(k+1)/2}\mathrm{Van}(0,1,\dots,k-1,k) \neq 0 \text{ (car les entiers } 0,\ 1,\dots,\ k \text{ sont deux à deux distincts).} \end{aligned}$$

U est donc inversible et on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{B}_2 \text{ est une base de } E.}$$

8. $Q = \mathscr{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2} = \mathscr{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1} \times \mathscr{P}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} = RU$.

$$\boxed{Q = RU.}$$

9. Soit F un sous-espace non nul de E, stable par d. Soit $n \in [\![0,k]\!]$ le degré maximum d'un polynôme de F. On a donc $F \subset \mathbb{C}_n[X]$.
Soit P un élément de F de degré n. Puisque F est stable par t_a, les polynômes $P(X)$, $P(X+a)$, ..., $P(X+ka)$ sont encore dans F puis $\mathrm{Vect}(P(X+ia))_{0\leq i\leq n} \subset F$. Mais d'après la question 7., la famille $(P(X+ia))_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc $\mathbb{C}_n[X] = \mathrm{Vect}(P(X+ia))_{0\leq i\leq n} \subset F$.

Finalement, un sous-espace non nul de $\mathbb{C}_k[X]$ stable par t_a est nécessairement l'un des sous-espaces $\mathbb{C}_0[X]$, $\mathbb{C}_1[X]$, ..., $\mathbb{C}_k[X]$. Réciproquement, chacun de ces sous-espaces est effectivement stable par d et donc en récupérant le sous-espace nul,

$$\boxed{\text{les sous-espaces de } \mathbb{C}_k[X] \text{ stable par } t_a \text{ sont } \{0\},\ \mathbb{C}_0[X],\ \mathbb{C}_1[X],\ \dots,\ \mathbb{C}_k[X].}$$

III Fonctions continues, 2π-périodiques

10. • Si $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, posons $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\phi_a(q) = e^{2ip\pi} = 1 = \phi_a(0) \text{ avec } q \neq 0.$$

Dans ce cas, ϕ_a n'est pas injective.

Soit alors $n \in \mathbb{Z}$. $\phi_a(n+q) = e^{i(n+q)2p\pi/q} = e^{ina+2ip\pi} = e^{ina} = \phi_a(n)$. Comme $q \neq 0$, ϕ_a est périodique (de période q).

• Si $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, soient $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned}\phi_a(n) = \phi_a(m) &\Rightarrow e^{i(n-m)a} = 1 \Rightarrow (n-m)a \in 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow n - m = 0 \text{ (car si } n - m \neq 0,\ \frac{a}{2\pi} \in \frac{1}{n-m}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ ce qui n'est pas).}\end{aligned}$$

En résumé,

$$\boxed{\phi_a \text{ est injective si } \frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}.}$$

11. Soit $n \in \mathbb{Z}$. En posant $y = x + a$, on obtient

$$\begin{aligned}c_n(t_a(f)) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t_a(f)(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(y)e^{-in(y-a)}\,dy = e^{ina} \times \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(y)e^{-iny}\,dy \\ &= e^{ina} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny}\,dy \text{ (car la fonction } y \mapsto f(y)e^{-iny} \text{ est } 2\pi\text{-périodique)} \\ &= \phi_a(n)c_n(f).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(t_a(f)) = \phi_a(n)c_n(f).}$$

12. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une éventuelle valeur propre de t_a et f un vecteur propre associé. On a donc $f \neq 0$ et $t_a(f) = \lambda f$. Par linéarité des coefficients de Fourier et d'après la question précédente, on a alors pour tout entier relatif n

$$\lambda c_n(f) = c_n(t_a(f)) = \phi_a(n)c_n(f) \quad (*).$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et non nulle, un corollaire de la formule de Parseval permet d'affirmer que la suite de ses coefficients de Fourier n'est pas nulle et donc qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c_k(f) \neq 0$. $(*)$ fournit alors $\lambda = \phi_a(k) = e^{ika}$. En résumé, si λ est une valeur propre de t_a, nécessairement λ est de la forme e^{ika}, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, pour tout réel x et tout entier relatif k,

$$(t_a(e_k))(x) = e^{ik(x+a)} = e^{ika}e_k(x),$$

et donc $t_a(e_k) = e^{ika}e_k$. Comme la fonction e_k n'est pas nulle, e^{ika} est effectivement valeur propre de t_a et e_k est vecteur propre de t_a associé à la valeur propre e^{ika}.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(t_a) = (e^{ika})_{k\in\mathbb{Z}}.}$$

• Si $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, la fonction ϕ n'est pas injective d'après la question 10.. On en déduit qu'il existe deux entiers distincts n et p telles que $e^{ina} = e^{ipa}$. Les fonctions e_n et e_p sont alors deux vecteurs propres de t_a associés à la valeur propre même valeur propree^{ina}. Comme la famille (e_n, e_p) est libre, le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(t_a - e^{ina}\mathrm{Id}_E)$ est de dimension au moins 2.
Donc, si $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, t_a admet au moins un sous-espace propre de dimension au moins 2.

• Supposons maintenant $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Dans ce cas, la fonction ϕ_a est injective ou encore les e^{ika}, $k \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux distincts.

Soient $k \in \mathbb{Z}$ puis f un vecteur propre de t_a associé à la valeur propre e^{ika}. On va montrer que $f = c_k(f)e_k$ en vérifiant que les fonctions f et $g = c_k(f)e_k$ ont la même suite de coefficients de FOURIER.
Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} e^{ina}c_n(f) &= c_n(t_a(f)) \text{ (d'après la question 11.)} \\ &= c_n(e^{ika}f) \text{ (car f est vecteur propre de } t_a \text{ associé à la valeur propre } e^{ika} \\ &= e^{ika}c_n(f), \end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (\phi_a(n) - \phi_a(k))c_n(f) = 0.$$

Puisque ϕ_a est injective, ceci montre déjà que $\forall n \neq k,\ c_n(f) = 0 = c_n(g)$.
Ensuite, $c_k(f) = c_k(f)c_k(e_k) = c_k(c_k(f)e_k) = c_k(g)$.
Finalement, les deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques f et $c_k(f)e_k$ ont la même suite de coefficients de Fourier. Un corollaire de la formule de PARSEVAL permet alors d'affirmer que $f = c_k(f)e_k$ et en particulier que $f \in \text{Vect}(e_k)$.
Le sous-espace propre de t_a associé à la valeur propre e^{ika} est donc la droite vectorielle engendrée par e_k. Ce sous-espace propre est de dimension 1.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } t_a \text{ sont tous de dimension 1 si et seulement si } \frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}.}$$

13. Puisque F est stable par t_a, les fonctions f, $t_a(f)$, ..., $t_a^p(f)$ sont toutes dans F. La famille $(t_a^j(f))_{0\leq j\leq p}$ est donc une famille de $p+1$ éléments de l'espace F qui est de dimension p. On en déduit que cette famille est liée. Par suite,

$$\exists(\alpha_j)_{0\leq j\leq p} \in \mathbb{C}^{p+1}/\ (\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0) \text{ et } \sum_{j=0}^{p} \alpha_j t_a^j(f) = 0.$$

Soit alors $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p} \alpha_j t_a^j(f) = 0 &\Rightarrow c_n\left(\sum_{j=0}^{p} \alpha_j t_a^j(f) = 0\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{p} \alpha_j c_n\left(t_a^j(f)\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{p} \alpha_j \left(e^{ina}\right)^j c_n(f) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\sum_{j=0}^{p} \alpha_j e^{inaj}\right) c_n(f) = 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\exists(\alpha_j)_{0\leq j\leq p} \in \mathbb{C}^{p+1}/\ (\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z},\ \left(\sum_{j=0}^{p} \alpha_j e^{inaj}\right) c_n(f) = 0.}$$

14. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers relatifs n tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{p} \alpha_j e^{inaj} = 0$. On peut alors fournir $p+1$ entiers relatifs deux à deux distincts n_0, ..., n_p tels que

$$\forall k \in [\![0, p]\!],\ \sum_{j=0}^{p} \alpha_j e^{in_k aj} = 0 \quad (*).$$

$(*)$ est un système linéaire homogène à $p+1$ équations et $p+1$ inconnues α_0, ..., α_p. Le déterminant de ce système est $\det\left((e^{in_k a})^j\right)_{0\leq k,j\leq p} = \text{Van}(e^{in_0 a}, \ldots, e^{in_p a})$. Mais $\dfrac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ et donc ϕ_a est injective. Par suite, les nombres $e^{in_0 a}$, ..., $e^{in_p a}$ sont deux à deux distincts et on sait alors que $\text{Van}(e^{in_0 a}, \ldots, e^{in_p a}) \neq 0$.
On en déduit que $(*)$ est un système de CRAMER homogène. $(*)$ admet donc l'unique solution $\alpha_0 = \ldots = \alpha_p = 0$ ce qui est en contradiction avec $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$.

Par suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $|n| \geq N$, on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{p} \alpha_j e^{in_k aj} \neq 0$. Pour un tel n, la relation de la question 13. montre alors que $c_n(f) = 0$. N dépend des α_j et donc de f.

$$\boxed{\exists N_f \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (|n| \geq N_f \Rightarrow c_n(f) = 0).}$$

15. Soient $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F puis $N = \text{Max}(N_{f_1}, \ldots, N_{f_p})$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq N$, on a $c_n(f_k) = 0$. Mais alors, puisque tout élément de F est combinaison linéaire des f_k, $1 \leq k \leq p$, par linéarité des coefficients de FOURIER, on a $c_n(g) = 0$ pour tout $g \in F$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq N$.

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}/\ \forall g \in F,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (|n| \geq N \Rightarrow c_n(g) = 0).}$$

16. Soit $g \in F$ et $h = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} c_k(g)e_k$. Pour $|p| \geq N+1$, on a $c_n(h) = 0 = c_n(g)$ et pour $|p| \leq N$, on a

$$c_n(h) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(g)c_n(e_k) \sum_{k=-N}^{N} c_k(g)\delta_{k,n} = c_n(g).$$

Ainsi, les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques g et h ont même suite de coefficients de FOURIER. On en déduit que

$$g = h = \sum_{k=-N}^{N} c_k(g)e_k \in \text{Vect}(e_k)_{-N \leq k \leq n} = G.$$

ce qui montre que $F \subset G$. D'autre part

$$t_a(G) = \text{Vect}(t_a(e_k))_{-N \leq k \leq N} = \text{Vect}(e^{ika}e_k)_{-N \leq k \leq N} \subset \text{Vect}(e_k)_{-N \leq k \leq N} = G.$$

On a montré que

$$\boxed{F \subset G \text{ et } t_a(G) \subset G.}$$

17. La question précédente montre que la restriction de t_a à G, notée $t_{a,G}$, est un endomorphisme de G.
Puisque $\dfrac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, les nombres e^{ika}, $-N \leq k \leq N$, sont $2N+1$ nombres deux à deux distincts, tous valeurs propres de $t_{a,G}$ (car $\forall k \in [\![-N, N]\!]$, $t_a(e_k) = e^{ika}e_k$). Comme $\dim(G) = 2N+1$, les e^{ika}, $-N \leq k \leq N$, sont toutes les valeurs propres de t_a et ces valeurs propres sont toutes simples.
Ainsi, $t_{a,G}$ admet $2N+1$ valeurs propres simples et on en déduit que

$$\boxed{\text{la restriction de } t_a \text{ à } G \text{ est un endomorphisme diagonalisable de } G.}$$

18. Puisque F est stable par t_a, la restriction de t_a à F est un endomorphisme de F que l'on note $t_{a,F}$. Puisque $F \subset G$ et que la restriction de t_a à G est diagonalisable, on sait que la restriction de t_a à F est diagonalisable (par exemple, il existe un polynôme scindé à racines simples, annulateur de $t_{a,G}$ et ce polynôme est encore annulateur de $t_{a,F}$).
Maintenant, les sous-espaces propres de $t_{a,F}$ sont des sous-espaces propres de t_a et même de $t_{a,G}$. Puisque $\dfrac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, la question 12. montre que les sous-espaces propres de $t_{a,F}$ sont des droites vectorielles de la forme $\text{Vect}(e_k)$, $k \in \mathbb{Z}$ et même plus précisément $-N \leq k \leq N$. Mais alors, puisque F est de dimension p et que $t_{a,F}$ est diagonalisable, on peut trouver des entiers relatifs n_1, ..., n_p éléments de $[\![-N, N]\!]$ tels que $F = \text{Vect}(e_{n_1}) \oplus \ldots \oplus \text{Vect}(e_{n_p})$. En particulier, on a $F = \text{Vect}(e_{n_1}, \ldots, e_{n_p})$.

$$\boxed{\text{Il existe un ensemble fini } S \text{ d'entiers relatifs tel que } F = \text{Vect}(e_k)_{k \in S}.}$$

