SESSION 2008

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIEME EPREUVE. FILIERE MP

I Un peu de géométrie

1. Pour $r \in [0, +\infty[$, posons $F(r) = f((r, 0))$. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Posons $x = ru_\theta$ où $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Puisque f est radiale,

$$f(x) = f(ru_\theta) = f \circ \mathrm{Rot}_{-\theta}(ru_\theta) = f(ru_0) = f((r, 0)) = F(r) = F(\|x\|).$$

Enfin, puisque $f \in \mathscr{C}^1_K(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, il existe $M > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| > M \Rightarrow f(x) = 0$. Mais alors pour $r > M$, on a $F(r) = 0$. Par suite, $F \in \mathscr{C}^1_K(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

$$\boxed{\exists F \in \mathscr{C}^1_K(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) /\ \forall x \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = F(\|x\|).}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. $\forall (y, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $T_{f,x}(y, \varphi) = f(x + \cos\varphi y + \sin\varphi \mathrm{Rot}_{\pi/2}(y))$.
Maintenant, l'application $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (y, \varphi) & \mapsto & y \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ qui est de dimension finie et l'application $\mathrm{Rot}_{\pi/2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car linéaire. On en déduit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (y, \varphi) & \mapsto & \mathrm{Rot}_{\pi/2}(y) \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ en tant que composée d'applications continues.
Il en est de même de l'application $(y, \varphi) \mapsto x + \cos\varphi y + \sin\varphi \mathrm{Rot}_{\pi/2}(y)$ puis de l'application $(y, \varphi) \mapsto f(x + \cos\varphi y + \sin\varphi \mathrm{Rot}_{\pi/2}(y))$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^2,\ T_{f,x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.}$$

Soit $y \in \mathbb{R}^2$. Pour $\varphi \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Rot}_{\varphi+2\pi}(y) = \mathrm{Rot}_\varphi(y)$ et donc

$$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \varphi \mapsto T_{f,x}(y, \varphi) \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

3. Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}^2$

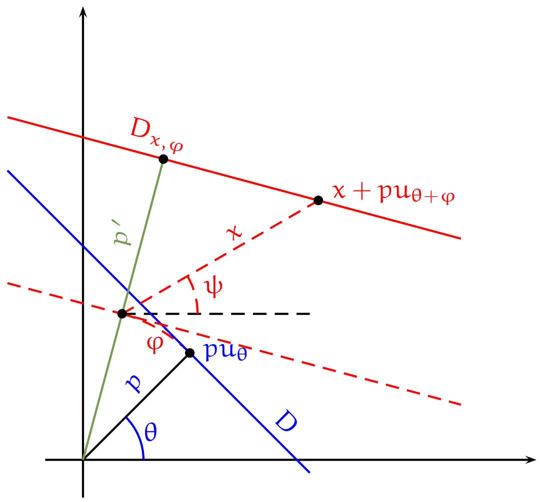
$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{f,x} \circ \mathrm{Rot}_\theta(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + \mathrm{Rot}_\varphi(\mathrm{Rot}_\theta(y)))\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + \mathrm{Rot}_{\theta+\varphi}(y))\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta+2\pi} f(x + \mathrm{Rot}_\alpha(y))\, d\alpha \text{ (en posant } \alpha = \theta + \varphi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + \mathrm{Rot}_\alpha(y))\, d\alpha \text{ (car la fonction } \alpha \mapsto f(x + \mathrm{Rot}_\alpha(y))) \text{ est } 2\pi\text{-périodique)} \\
&= \mathcal{T}_{f,x}(y).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^2, \text{ l'application } \mathfrak{T}_{f,x} \text{ est radiale.}}$$

4. L'application $r\ :\ u \mapsto x + \mathrm{Rot}_\varphi(u)$ est la composée de la rotation de centre O et d'angle φ et de la translation de vecteur x. r est donc un déplacement d'angle φ c'est-à-dire la translation de vecteur x si $\varphi = 0$ et une rotation affine d'angle φ si $\varphi \in]0, 2\pi[$.
D est la droite passant par le point $x + pu_\theta$ de vecteur normal u_θ et donc $D_{x,\varphi}$ est la droite passant par le point $x + \mathrm{Rot}_\varphi(pu_\theta) = x + pu_{\theta+\varphi}$ et de vecteur normal $\mathrm{Rot}_\varphi(u_\theta) = u_{\theta+\varphi}$. Le paramètre p' de $D_{x,\varphi}$ est la distance de O à la droite $D_{x,\varphi}$.
Le projeté orthogonal de O sur $D_{x,\varphi}$ est le forme $\lambda u_{\theta+\varphi}$ où λ est tel que $(\lambda u_{\theta+\varphi} - (x + pu_{\theta+\varphi})).u_{\theta+\varphi} = 0$ ce qui s'écrit

$$\lambda = \frac{(\|x\|u_\psi + pu_{\theta+\varphi}).u_{\theta+\varphi}}{u_{\theta+\varphi}.u_{\theta+\varphi}} = \|x\|(\cos\psi\cos(\theta+\varphi) + \sin\psi\sin(\theta+\varphi)) + p = \|x\|\cos(\theta+\varphi-\psi) + p.$$

On a donc $p' = |\lambda| = |\|x\| \cos(\theta + \varphi - \psi) + p|$.



$$\boxed{D_{x,\varphi} \text{ est la droite de paramètres } p_{x,\varphi} = |\|x\| \cos(\theta + \varphi - \psi) + p| \text{ et } \theta_{x,\varphi} = \left\{\begin{array}{l} \theta + \varphi \text{ si } \theta + \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta + \varphi - 2\pi \text{ si } \theta + \varphi \in [2\pi, 4\pi[\end{array}\right. .}$$

II Lemme préparatoire

5. On suppose que f est nulle à l'extérieur de $B(O, M)$.
Soit $(\theta, R) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Pour $i \in \{1, 2\}$, posons $g_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0, R] & \to & \mathbb{R} \\ (x_i, r) & \mapsto & rf(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) \end{array}$. Soit $i \in \{1, 2\}$.

• Pour tout $x_i \in \mathbb{R}$, la fonction $r \mapsto rf(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)$ est continue par morceaux sur le segment $[0, R]$ et donc intégrable sur le segment $[0, R]$.

• La fonction g_i est pourvue sur $\mathbb{R} \times [0, R]$ d'une dérivée partielle par rapport à x_i à savoir

$$\forall (x_i, r) \in \mathbb{R} \times [0, R],\ \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_i, r) = r\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta).$$

• Pour tout $x_i \in \mathbb{R}$, la fonction $r \mapsto \dfrac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_i, r)$ est continue par morceaux sur le segment $[0, R]$ et pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x_i \mapsto \dfrac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_i, r)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Enfin, puisque $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ est continue sur le compact $B(O, M)$, la fonction $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ est majorée par un certain réel positif m qui est encore un majorant de f sur $\mathbb{R}^2$ puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est nulle à l'extérieur de $B(O, M)$.

Ainsi, $\forall (x_i, r) \in \mathbb{R} \times [0, R]$, $\left|\dfrac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_i, r)\right| \leqslant m_1 r = \varphi(r)$ où la fonction $\varphi : r \mapsto m_1 r$ est continue et intégrable sur le segment $[0, R]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de Leibniz), V_i est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall R \in \mathbb{R}^+,\ \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall i \in \{1, 2\},\ V_i'(x_i) = \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) r\ dr.}$$

Soit $R \in \mathbb{R}^+$. Pour $i \in \{1, 2\}$, posons $h_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x_i, \theta) & \mapsto & \displaystyle\int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) r\ dr \end{array}$. Soit $i \in \{1, 2\}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et soit m_0 un majorant de la fonction $|f|$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout réel $\theta \in [0, 2\pi]$, la fonction $r \mapsto rf(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)$ est continue sur $[0, R]$ et pour tout réel $r \in [0, R]$, la fonction $\theta \mapsto rf(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)$ est continue sur $[0, 2\pi]$.
Enfin, $\forall (r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$, $|rf(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)| \leqslant m_0 R = \varphi_0(r)$ où φ_0 est une fonction continue et intégrable sur $[0, R]$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres montre que, pour tout $x_i \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto \int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) r\, dr$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ et donc intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$.

• D'après l'étude de la fonction V_i, la fonction h_i est pourvue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ d'une dérivée partielle par rapport à x_i à savoir

$$\forall (x_i, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi],\ \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x_i, \theta) = \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) r\, dr.$$

• Pour tout $x_i \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x_i, \theta)$ est continue par morceaux sur le segment $[0, 2\pi]$ (de nouveau théorème de continuité des intégrales à paramètres) et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, la fonction $x_i \mapsto \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x_i, \theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Enfin, $\forall (x_i, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, $\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x_i, r)\right| \leq mR^2 = \varphi_1(\theta)$ la fonction $\varphi_1\ :\ \theta \mapsto mR^2$ est continue et intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de Leibniz), W_i est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall R \in \mathbb{R}^+,\ \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall i \in \{1, 2\},\ W_i'(x_i) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) r\, dr\, d\theta.}$$

6. En passant en polaires, on obtient

$$\iint_{B(x,R)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}((y_1, y_2)) - \frac{\partial P}{\partial x_2}((y_1, y_2))\right)\ dy_1\, dy_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x + ru_\theta) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(x + ru_\theta)\right) r dr d\theta$$

On note alors $S^+(x, R)$ le bord de $B(x, R)$ orienté dans le sens direct. La formule de Green-Riemann permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\iint_{B(x,R)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}((y_1, y_2)) - \frac{\partial P}{\partial x_2}((y_1, y_2))\right)\ dy_1\, dy_2 &= \int_{S^+(x,R)} (P((y_1, y_2))dy_1 + Q((y_1, y_2))dy_2) \\
&= \int_0^{2\pi} (P((x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta))(-R\sin\theta) + Q((x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta))(R\cos\theta))\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (P(x + Ru_\theta)(-R\sin\theta) + Q(x + Ru_\theta)(R\cos\theta))\, d\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, R) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+,\ \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x + ru_\theta) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(x + ru_\theta)\right) r dr d\theta = R\int_0^{2\pi} (-\sin\theta P(x + Ru_\theta) + \cos\theta Q(x + Ru_\theta))\, d\theta.}$$

7. Soit $(x, R) \in Q_A$. Soit M tel que $\text{supp}(f) \subset B(O, M)$. f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et nulle à l'extérieur de $B(O, M)$. f est donc intégrable sur $\mathbb{R}^2$. On effectue la translation de variables : $y_1 = x_1 + z_1$ et $y_2 = x_2 + z_2$ et donc $dy_1\, dy_2 = dx_1\, dx_2$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)\ dy_1\, dy_2 = \iint_{B(O,M)} f(y_1, y_2)\ dy_1\, dy_2 &= \iint_{B(-x,M)} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)\ dx_1\, dx_2 \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)\ dx_1\, dx_2.
\end{aligned}$$

Soit maintenant M' tel que $\text{supp}(f) \subset B(x, M')$ et $M' > R$. En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)\ dx_1\, dx_2 = \iint_{B(O,M')} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)\ dx_1\, dx_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{M'} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\ r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\ r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_R^{M'} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\ r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\ r dr d\theta + \int_R^{M'} \left(\int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\ d\theta\right) r dr.
\end{aligned}$$

Enfin, soit $r \in [R, M']$. On a $r \geq R > \|x\| + A$ et donc $(x, r) \in Q_A$.

Par hypothèse, on a alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\, d\theta = 0$. Ainsi, $\displaystyle\int_R^{M'} \left(\int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\, d\theta\right) r dr = 0$ et il reste

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)\, dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\, r dr d\theta.}$$

8. Soient $x \in \overset{\circ}{B}(O, R - A)$ puis $i \in \{1, 2\}$. Alors, $\|x\| < R - A$ ou encore $R > \|x\| + A$ de sorte que $(x, A) \in Q_A$. D'après 7),

$$W_i(x_i) = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\, r dr d\theta = \iint_{\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2.$$

Cette dernière expression ne dépend pas de x_i et donc W_i est constante sur $]-(R-A), R-A[$ puis sur $[-(R-A), R-A)]$ par continuité. D'après 5), pour tout $x \in \overset{\circ}{B}(O, R - A)$ et $i \in \{1, 2\}$ on a alors

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) r\, dr\, d\theta = W_i'(x_i) = 0.$$

On applique maintenant 6) à $P = 0$ et $Q = f$ et on obtient

$$R\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\cos\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\, r dr d\theta = 0,$$

et de même en prenant $P = -f$ et $Q = 0$,

$$R\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\, r dr d\theta = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in \overset{\circ}{B}(O, R - A),\ \int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\cos\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\sin\theta\, d\theta = 0.}$$

9. La fonction $y_1 f$ est bien dans $\mathscr{C}_K^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit alors $(x, R) \in Q_A$.

$$\int_0^{2\pi} (y_1 f)(x + Ru_\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (x_1 + R\cos\theta) f(x + Ru_\theta)\, d\theta = x_1 \int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\, d\theta + R\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\cos\theta\, d\theta = 0,$$

De même, la fonction $y_2 f$ est dans $\mathscr{C}_K^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et pour $(x, R) \in Q_A$.

$$\int_0^{2\pi} (y_1 f)(x + Ru_\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (x_2 + R\sin\theta) f(x + Ru_\theta)\, d\theta = x_2 \int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\, d\theta + R\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\sin\theta\, d\theta = 0,$$

$\boxed{\text{Les fonctions } y_1 f \text{ et } y_2 f \text{ satisfont les hypothèses du lemme.}}$

10. En réitérant le résultat de la question 9), il est clair par récurrence que $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $y_1^k y_2^l f$ vérifie les hypothèses du lemme.

Soit $(x, R) \in Q_A$. Montrons par récurrence sur $n = k + l$ que $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\cos^k\theta \sin^l\theta\, d\theta = 0$.

- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k + l \leq n$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x + Ru_\theta)\cos^k\theta \sin^l\theta\, d\theta = 0$.

Soit $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k + l = n$. La fonction $y_1^{k+1} y_2^l f$ vérifie les hypothèses du lemme et donc d'après 8)

$$\int_0^{2\pi} (y_1^k y_2^l f)(x + Ru_\theta)\cos\theta\, d\theta = 0$$

ou encore

$$\int_0^{2\pi}(x_1+R\cos\theta)^k(x_2+R\sin\theta)^l\cos\theta f(x+Ru_\theta)\ d\theta=0\quad(*).$$

En développant $(x_1+R\cos\theta)^k(x_2+R\sin\theta)^l\cos\theta$, on obtient une expression du type

$$R^{k+l}\cos^{k+1}\theta\sin^l\theta+\sum_{k'+l'\leq n}a_{k',l'}\cos^{k'}\theta\sin^{l'}\theta.$$

Par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k'+l'\leq n}a_{k',l'}\cos^{k'}\theta\sin^{l'}\theta\right)f(x+Ru_\theta)\ d\theta=0.$

$(*)$ s'écrit alors $R^{k+l}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{k+1}\theta\sin^l\theta f(x+Ru_\theta)\ d\theta=0$ et donc $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{k+1}\theta\sin^l\theta f(x+Ru_\theta)\ d\theta=0$. De même, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^k\theta\sin^{l+1}\theta f(x+Ru_\theta)\ d\theta=0$ et le résultat est démontré pour $n+1$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ \int_0^{2\pi}f(x+Ru_\theta)\cos^k\theta\sin^l\theta\ d\theta=0.}$$

11. Soient $(x,R)\in Q_A$ et $n\in\mathbb{N}$. D'après 10),

$$\int_0^{2\pi}f(x+Ru_\theta)e^{in\theta}\ d\theta=\int_0^{2\pi}f(x+Ru_\theta)(\cos(\theta)+i\sin\theta)^n\ d\theta=\sum_{k=0}^{n}C_n^k i^k\int_0^{2\pi}f(x+Ru\theta)\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta\ d\theta=0.$$

Par passage aux parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{2\pi}f(x+Ru_\theta)\cos(n\theta)\ d\theta=\int_0^{2\pi}f(x+Ru_\theta)\sin(n\theta)\ d\theta=0.}$$

12. Soit $(x,R)\in Q_A$. La fonction $g\ :\ \theta\mapsto f(x+Ru_\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. De plus, d'après la question précédente, ses coefficients de Fourier sont nuls. La formule de Parseval permet alors d'écrire :

$$\int_0^{2\pi}f^2(x+Ru_\theta)\ d\theta=\int_0^{2\pi}g^2(\theta)\ d\theta=\pi\left(\frac{(a_0(g))^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(g))^2+(b_n(g))^2\right)=0.$$

$$\boxed{\forall(x,R)\in Q_A,\ \int_0^{2\pi}f^2(x+Ru_\theta)\ d\theta=0.}$$

13. Soit $(x,R)\in Q_A$. La fonction $\theta\mapsto f^2(x+Ru_\theta)$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$. Cette fonction est donc la fonction nulle. Ainsi, $\forall(x,R)\in Q_A,\ f(x+Ru_\theta)$.
Soit $R>A$. Le couple (O,R) est dans Q_A. D'après ce qui précède, $\forall\theta\in[0,2\pi]$, $f(Ru_\theta)=0$.
On a ainsi montré que $\forall R>A$, $\forall\theta\in[0,2\pi]$, $f(Ru_\theta)=0$ ou encore que $\forall x\in\mathbb{R}^2,\ \|x\|>A\Rightarrow f(x)=0$ et donc

$$\boxed{f\text{ est nulle sur le complémentaire de }B(O,A).}$$

III Théorème de support

14. Les fonctions considérées sont continues à support compact et donc intégrables sur $\mathbb{R}$.
Soient $p\in[0,+\infty[$ et $\theta\in[0,2\pi[$. Puisque f est radiale,

$$\widehat{f}(\theta,p)=\int_{\mathbb{R}}f(pu_\theta+tv_\theta)\ dt=\int_{\mathbb{R}}f\circ\mathrm{Rot}_{-\theta}(pu_\theta+tv_\theta)\ dt=\int_{\mathbb{R}}f(pu_0+tv_0)\ dt=\widehat{f}(0,p).$$

Ensuite,

$$\widehat{f}(0,p) = \int_{\mathbb{R}} f(pu_0 + tv_0)\ dt = \int_{\mathbb{R}} F(\|pu_0 + tv_0\|)\ dt = \int_{\mathbb{R}} F\left(\sqrt{p^2+t^2}\right)\ dt = 2\int_0^{+\infty} F\sqrt{p^2+t^2})\ dt.$$

15. Soit $\nu > 0$. Posons $u = \nu + t^2$ et donc $du = 2t\ dt = 2(u-\nu)^{1/2}\ dt$ ou encore $dt = \dfrac{1}{2}(u-\nu)^{-1}2\ du$. Puisque l'application $t \mapsto \nu + t^2$ est un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]\nu,+\infty[$, on a

$$\widehat{f}(0,\sqrt{\nu}) = 2\int_0^{+\infty} F(\sqrt{\nu+t^2})\ dt = 2\int_{\nu}^{+\infty} F(\sqrt{u}) \times \frac{1}{2}(u-\nu)^{-1}2\ du = \int_{\nu}^{+\infty} F(\sqrt{u})(u-\nu)^{-1/2}\ du.$$

16. Soit $h\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in [0,+\infty[,\ h(u) = F\left(\sqrt{u}\right)$. F est continue sur $\mathbb{R}^+$ à support compact contenu dans un certain $[0,M]$ et il en est de de même de h dont le support est contenu dans $[0,M^2]$. De plus, pour $\nu > 0$, $\widehat{f}(0,\sqrt{\nu}) = \displaystyle\int_{\nu}^{+\infty} F(\sqrt{u})(u-\nu)^{-1/2}\ du = Lh(\nu)$ où la fonction Lh a été définie en page 3 de l'énoncé.

D'après les résultats admis par l'énoncé, la fonction Lh est continue sur $\mathbb{R}^+$, nulle en dehors de $[0,M^2]$ et de plus, la fonction $L(Lh)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $(L(Lh))' = -\pi h$. Mais, pour $\nu > A^2$, l'hypothèse du théorème 1 fournit

$$Lh(\nu) = \int_{\nu}^{+\infty} F(\sqrt{u})(u-\nu)^{-1/2}\ du = \widehat{f}(0,\sqrt{\nu}) = 0$$

On en déduit que pour $\nu > A^2$, $(L(Lh))(\nu) = \displaystyle\int_{\nu}^{+\infty} Lh(\nu)(u-\nu)^{-1/2}\ du = 0$ puis que $-\pi h(\nu) = (L(Lh))'(\nu) = 0$. Par suite, h est nulle sur $]A^2+\infty[$ ou encore

$$\boxed{F \text{ est nulle sur }]A,+\infty[.}$$

17. Soit $(x,p,\theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[$. Etudions le support de la fonction $t \mapsto T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta, \varphi)$, $\varphi \in [0,2\pi]$ donné.
Soit $M > 0$ tel que $\text{supp}(f) \subset B(O,M)$. On a

$$T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi) = f(x + \text{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta)).$$

Cette expression est nulle dès que $\|x + \text{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta)\| > M$. Mais pour $|t| \geq \|x\|$, on a

$$\begin{aligned}\|x + \text{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta)\| &\geq |\|x\| - \|\text{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta)\|| = |\|x\| - \|pu_\theta + tv_\theta\|| = \left|\|x\| - \sqrt{p^2+t^2}\right| = \sqrt{p^2+t^2} - \|x\| \\ &\geq |t| - \|x\|.\end{aligned}$$

Par suite, si $|t| > m = \|x\| + M$, on a $\|x + \text{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta)\| > M$ et donc $T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi) = 0$. Ainsi, pour tout réel $\varphi \in [0,2\pi]$, le support de la fonction $t \mapsto T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)$ est contenu dans $[-m,m]$ où $m = \|x\| + M$.

Mais alors, pour $|t| > m$, $\mathcal{T}_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)d\varphi = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 0\ d\varphi = 0$ et le support de la fonction $t \mapsto \mathcal{T}_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta)$ est également contenu dans $[-m,m]$.

Sinon, le théorème de dérivation sous le signe somme montre une fois de plus que $\mathcal{T}_{f,x}$ est dans $C^1_K(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ de sorte que $\widehat{\mathcal{T}_{f,x}}$ est bien définie à partir de la définition 2 et

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{T}_{f,x}}(\theta,p) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta)\ dt = \int_{-m}^{m} \mathcal{T}_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta)\ dt \\ &= \int_{-m}^{m}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)\ d\varphi\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-m}^{m} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)\ dt\ d\varphi \text{ (d'après le théorème de Fubini)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta,\varphi)\ dt\ d\varphi.\end{aligned}$$

18. Soit $p > A + \|x\|$ et $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi]^2$.

$$\int_{\mathbb{R}} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta, \varphi)\ dt = \int_{\mathbb{R}} f(x + \mathrm{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta))\ dt.$$

Maintenant, d'après la question 4., $x + \mathrm{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta) = p'u_{\theta+\varphi} + t'v_{\theta+\varphi}$ où $p' = |\|x\|\cos(\theta + \varphi - \psi) + p|$ et t' est un réel déduit de t par translation.
Par hypothèse du théorème 1, si $p' > A$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta, \varphi)\ dt = \int_{\mathbb{R}} f(x + \mathrm{Rot}_\varphi(pu_\theta + tv_\theta))\ dt = \int_{\mathbb{R}} f(p'u_{\theta+\varphi} + t'v_{\theta+\varphi})\ dt' = \widehat{f}(\theta + \varphi, p') = 0.$$

Enfin, $p' \geq p - \|x\|\cos(\theta + \varphi - \psi) \geq p - \|x\|$ et donc, si $p > A + \|x\|$, on a $p' > A$ puis

$$\widehat{\mathcal{T}_{f,x}}(\theta, p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} T_{f,x}(pu_\theta + tv_\theta, \varphi)\ dt\ d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 0\ d\varphi = 0.$$

$$\boxed{\forall \theta \in [0, 2\pi[,\ \forall p > A + \|x\|,\ \widehat{\mathcal{T}_{f,x}}(\theta, p) = 0.}$$

19. $\{x + \mathrm{Rot}_\varphi(y),\ \ \varphi \in [0, 2\pi]\}$ est le cercle de centre x et de rayon $\|y\|$. L'inégalité $\|y\| > \|x\| + A$ s'écrit encore $(x, \|y\|) \in Q_A$.

20. La fonction $\mathcal{T}_{f,x}$ est dans $C^1_K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est radiale d'après la question 3. D'après la question 18., $\forall p > A + \|x\|$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathcal{T}_{f,x}}(\theta, p) = 0$.
D'après la question 16., Pour $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|y\| > A + \|x\|$, on a $\mathcal{T}_{f,x}(y) = 0$ ce qui s'écrit encore $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x + \mathrm{Rot}_\varphi(y))d\varphi = 0$.

Soit $R > A + \|x|$ puis $y = (R, 0)$. On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x + \mathrm{Rot}_\varphi(y))d\varphi = \int_0^{2\pi} f(x + Ru\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} f(x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta)\ d\theta$ et puisque $\|y\| = R > A + \|x\|$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta)\ d\theta = 0$.

En résumé, $\forall (x, T) \in Q_A$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta)\ d\theta = 0$ et le lemme 1 permet d'affirmer que f est nulle sur le complémentaire de $B(O, A)$ et donc que pour $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| > A$, on a $f(x) = 0$. Le théorème 1 est démontré.

