A 2007 MATH. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude d'une série trigonométrique

On rappelle que pour tout réel $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, pour tout réel t,

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

On pose, pour tout réel x et tout $\alpha \in]0, +\infty[$,

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}. \tag{1}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier différentes propriétés de cette fonction.

Dans tout le problème, u représente un réel de $]-1, 1[$.

I Deux représentations de S_α

❏ 1 - Prouver que pour tout $\alpha > 1$, la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.

❏ 2 - Étudier, en fonction du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$, de la fonction

$$J \, : \, t \mapsto \frac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}.$$

Soit $t \geq 0$. On pose,

$$R_N(t,u) = \Big(\frac{u}{e^t - u} - ue^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (ue^{-t})^n \Big) t^{\alpha-1}.$$

❏ 3 - Simplifier l'expression de R_N, en l'écrivant sous forme d'une fraction.

❏ 4 - Prouver que pour tout $u \in]-1,1[$,

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t,u) \, \mathrm{d}t = 0.$$

❏ 5 - Exprimer, en fonction de $\Gamma(\alpha)$, la constante $K(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\, t^{\alpha-1}}{e^t - u}\, \mathrm{d}t = K(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}, \quad \text{pour tout } u \in]-1{,}1[. \tag{2}$$

❏ 6 - On admet que l'identité (2) reste vraie aussi pour $u = e^{ix}$ où $x \in]0{,}2\pi[$. En déduire pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, l'identité suivante :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\ t - \cos x}\ \mathrm{d}t.$$

❏ 7 - Montrer, pour tout $M > 0$, pour tout $u \in]-1,1[$, l'égalité suivante :

$$\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{ch}\, t - u}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\ \mathrm{d}t.$$

❏ 8 - Établir, pour tout $u \in]-1,1[$, l'identité

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\ \mathrm{d}t.$$

❏ 9 - Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, exprimer $S_\alpha(x)$ en fonction de fonctions trigonométriques et de G_α où

$$G_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \text{ pour } u \in]-1,1[$$

avec

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\mathrm{ch}\, t)^{n+1}}\ \mathrm{d}t. \tag{3}$$

II Comportement asymptotique

Soit $B\ :]0{,}+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^{+\infty} |B(s)|\ \mathrm{d}s < +\infty. \tag{4}$$

$$B(s) = a s^{\lambda-1}(1 + o(1)),\ s \to 0^+,\ a > 0,\ \lambda \in]0, +\infty[. \tag{5}$$

❏ 10 - Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\Big|\int_0^{\delta}(B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns})\ \mathrm{d}s\Big| < \varepsilon\,\frac{a}{n^{\lambda}}\ \Gamma(\lambda).$$

❏ 11 - Prouver que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta) > 0$ (que vous exprimerez sous la forme d'une intégrale indépendante de n) telle que pour tout $n > 1$

$$\Big|\int_{\delta}^{+\infty}(B(s)e^{-ns} - as^{\lambda-1}e^{-ns})\ \mathrm{d}s\Big| \leq Ce^{-(n-1)\delta}.$$

❏ 12 - Prouver que, sous ces hypothèses,

$$\int_0^{+\infty} B(s)e^{-ns}\ \mathrm{d}s = a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^{\lambda}}(1+o(1)), \text{ quand } n \to +\infty.$$

❏ 13 - Montrer que pour tout entier n, on peut écrire

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s}-1}\right)\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s}-1}}\ e^{-ns}\ \mathrm{d}s,$$

où a_n est défini dans (3).

On pose dorénavant, pour tout $s > 0$,

$$B(s) = \frac{\left(\ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s}-1}\right)\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s}-1}}.$$

❏ 14 - Donner un équivalent de la fonction B au voisinage de 0^+.

❏ 15 - Déterminer la limite de $a_n n^{\alpha/2}$ quand n tend vers l'infini.

FIN DU PROBLÈME