SESSION 2007

Concours commun Mines-Ponts

PREMIERE EPREUVE. FILIERE MP

I Cas particuliers

1. D'après **A.**, il existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\chi(a_0) \neq 0$. La condition **C.** fournit alors $\chi(a_0) = \chi(a_0)\chi(1)$ et donc $\chi(1) = 1$ puisque $\chi(a_0) \neq 0$.

$$\boxed{\chi(1) = 1.}$$

2. On a $\chi(0) = 0$ et $\chi(1) = 1$ et puisque χ est 2-périodique, on a nécessairement

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \chi(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in 2\mathbb{Z} \\ 1 \text{ si } n \in 1 + 2\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Réciproquement, il est clair que **A.**, **B.** et **D.** sont vérifiées. D'autre part, si a et b sont deux entiers relatifs impairs alors ab est impair et $\chi(a)\chi(b) = 1 = \chi(ab)$ et si l'un des deux entiers relatifs a ou b est pair, alors ab est pair et $\chi(a)\chi(b) = 0 = \chi(ab)$. **C.** est donc également vérifiée.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \chi(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in 2\mathbb{Z} \\ 1 \text{ si } n \in 1 + 2\mathbb{Z} \end{cases}.}$$

3. Puisque χ est 4-périodique

$$\chi(3)^2 = \chi(-1)^2 = \chi((-1)^2) = \chi(1) = 1,$$

et donc

$$\boxed{\chi(3) \in \{-1, 1\}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si n est pair, n n'est pas premier à 4 et donc $\chi(n) = 0$.
- Si n est congru à 1 modulo 4, $\chi(n) = \chi(1) = 1$ et si n est congru à 3 modulo 4, $\chi(n) = \chi(3) = -1$.

Il s'agit donc de vérifier la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ et d'en calculer la somme. Le rappel (2) montre que cette série converge et que sa somme vaut $\operatorname{Arctan} 1$.

$$\boxed{\text{Si } N = 4 \text{ et } \chi(3) = -1,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \frac{\pi}{4}.}$$

II Convergence de la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$

5. Puisque a et N sont premiers entre eux, $\overline{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
Considérons alors les application $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* & \to & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ \overline{k} & \mapsto & \overline{a}\overline{k} \end{array}$ et $\psi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* & \to & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ \overline{k} & \mapsto & \overline{a}^{-1}\overline{k} \end{array}$. φ et ψ sont bien des applications et $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*}$. En particulier, φ est une bijection.

Mais alors

$$\overline{\prod_{k\in P} ak} = \prod_{\overline{k}\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} \overline{a}\overline{k} = \prod_{\overline{k}\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} \overline{k} = \overline{\prod_{k\in P} k}.$$

Ceci signifie que $\displaystyle\prod_{k\in P} ak - \prod_{k\in P} k$ est un entier divisible par N. Maintenant,

$$\prod_{k\in P} ak - \prod_{k\in P} k = (a^{\varphi(N)} - 1)\prod_{k\in P} k.$$

Or, chaque k de P est premier à N et il en est de même de $\displaystyle\prod_{k\in P} k$. Mais alors, puisque N divise $\displaystyle(a^{\varphi(N)} - 1)\prod_{k\in P} k$, le théorème de Gauss nous permet d'affirmer que

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{N}^*,\ (a \wedge N = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0\ (N)).}$$

6. Puisque χ est N-périodique

$$\chi(a)^{\varphi(N)} = \chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(1) = 1,$$

et donc $\chi(a) \in \{-1, 1\}$.

$$\boxed{|\chi(a)| = 1.}$$

7. Soit $(k, l) \in [\![1, N-1]\!]^2$. On a $ak \equiv r_k\ (N)$ et $al \equiv r_l\ (N)$. Mais alors

$$\begin{aligned} r_k = r_l &\Rightarrow a(k-l) \equiv 0\ (N) \\ &\Rightarrow k - l \equiv 0\ (N) \text{ (car } a \wedge N = 1 \text{ et d'après le théorème de Gauss)} \\ &\Rightarrow k - l = 0 \text{ (car } -N < k - l < N). \end{aligned}$$

Par contraposition, $k \neq l \Rightarrow r_k \neq r_l$.

$$\boxed{\text{Les } r_k \text{ sont deux à deux distincts.}}$$

8. Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. Montrons que $r_k \neq 0$.
Si $r_k = 0$, alors $ak \equiv 0\ (N)$ et donc $k \equiv 0\ (N)$ d'après le théorème de Gauss. Ceci contredit $k \in [\![1, N-1]\!]$ et donc $r_k \neq 0$.
On en déduit que l'application $k \mapsto r_k$ est une injection de l'ensemble fini $[\![1, N-1]\!]$ dans lui-même et donc une bijection.

Puisque χ est N-périodique, on a alors

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).}$$

9. Soit a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$. Alors d'après 6., $\chi(a) = -1$ et d'après 8.

$$\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = -\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k),$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$.

Ensuite, comme χ est N-périodique, $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$ est constant quand n varie et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0.}$$

10. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $p = E\left(\dfrac{m}{N}\right)$ de sorte que $pN \leq m < (p+1)$. Si $p \geq 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \chi(k) &= \sum_{k=1}^{pN} \chi(k) + \sum_{k=pN+1}^{m} \chi(k) \\ &= \sum_{q=0}^{p-1} \left(\sum_{qN+1}^{(q+1)N} \chi(k) \right) + \sum_{k=pN+1}^{m} \chi(k) \\ &= \sum_{k=pN+1}^{m} \chi(k) \text{ (d'après 9.)} \\ &= \sum_{k=1}^{m-pN} \chi(k) \text{ (car } \chi \text{ est N-périodique)},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$. Donc

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{k=1}^{m-E(m/N)N} \chi(k).$$

Soit de nouveau $m \in \mathbb{N}^*$. Si $k \notin P$, $\chi(k) = 0$ d'après B. et si $k \in P$, $|\chi(k)| = 1$ d'après 6.. Comme le nombre de terme de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-pN} \chi(k)$ est au plus $N - 1$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-pN} \chi(k)\right| \leq \sum_{k=1}^{m-pN} |\chi(k)| \leq \sum_{k=1}^{N-1} |\chi(k)| = \sum_{k \in P} 1 = \varphi(N).$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq \varphi(N).}$$

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\alpha_n = \chi(n)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. D'après le rappel (1) (transformation d'Abel)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{T_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_k}{k+1} \\ &= 1 - \frac{T_1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{T_n}{n}\end{aligned}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{T_n}{n}\right| \leq \dfrac{\varphi(N)}{n}$ et donc $\dfrac{T_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left|T_k \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)\right| \leq \varphi(N) \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)$. Or, $\varphi(N) \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)$ est le terme général d'une série télescopique convergente. On en déduit que la série de terme général $T_k \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)$ est absolument convergente et donc convergente.

Il en est de même de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}\right)_{n\geq 1}$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}\right)_{n\geq 1} \text{ est convergente.}}$$

III Comportement asymptotique

12. Puisque m et n sont premiers entre eux, l'ensemble des diviseurs de mn est l'ensemble des produits d_1d_2 où d_1 est un diviseur de n et d_2 est un diviseur de m.

$$\begin{aligned} f_nf_m &= \left(\sum_{d_1|n} \chi(d_1)\right)\left(\sum_{d_2|m}^{\chi}(d_2)\right) = \sum_{d_1|n,d_2|m} \chi(d_1)\chi(d_2) = \sum_{d_1|n,d_2|m} \chi(d_1d_2) \\ &= \sum_{d|nm} \chi(d) = f_{nm}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ (n \wedge m = 1 \Rightarrow f_nf_m = f_{nm}).}$$

13. Soient p un nombre premier et α un entier naturel non nul. On sait que $\chi(p) \in \{-1, 0, 1\}$. Donc

$$f_{p^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} p^\beta = \begin{cases} \dfrac{1-(\chi(p))^{\alpha+1}}{1-\chi(p)} \text{ si } \chi(p) \neq 1 \\ \alpha+1 \text{ si } \chi(p) = 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha+1 \text{ si } \chi(p) = 1 \\ 1 \text{ si } \chi(p) = 0 \\ 0 \text{ si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ impair} \\ 1 \text{ si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ pair} \end{cases}$$

$$\boxed{f_{p^\alpha} = \begin{cases} \alpha+1 \text{ si } \chi(p) = 1 \\ 1 \text{ si } \chi(p) = 0 \\ 0 \text{ si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ impair} \\ 1 \text{ si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ pair} \end{cases}.}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, on a $\chi(1) = 1 \geq 0$. Si $n \geq 2$, la décomposition primaire de n s'écrit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ et

$$f_n = f_{p_1^{\alpha_1}} \dots f_{p_k^{\alpha_k}} \geq 0 \text{ d'après 13..}$$

D'autre part, puisque χ est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$,

$$f_n = \sum_{d|n} \chi(d) \leq \sum_{d|n} 1 \leq \sum_{d=1}^{n} 1 = n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq f_n \leq n.}$$

15. Avec les notations de la question précédente, on a $f_{1^2} = 1 \geq 1$ et pour $n \geq 2$,

$$f_n = f_{p_1^{2\alpha_1}} \dots f_{p_k^{2\alpha_k}} \geq 1 \text{ d'après 13..}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n^2} \geq 1.}$$

16. Notons R le rayon de la série entière considérée.
D'après 15., la suite $(f_{n^2}1^{n^2})$ ne tend pas vers 0 et donc la série de terme général f_n1^n est grossièrement divergente. On en déduit que $R \leq 1$.
D'après 14., si $|x| < 1$, la série de terme général f_nx^n converge. On en déduit que $R \geq 1$ et finalement

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty} f_nx^n \text{ a un rayon de convergence égal à } 1.}$$

17. Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. D'après les questions 14. et 15.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n^2} x^{n^2} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}.$$

Maintenant, puisque $0 < x < 1$, la fonction $t \mapsto x^{t^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} &\geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} x^{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} x^{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} e^{-\left(t\sqrt{-\ln x}\right)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \text{ (car } \frac{1}{2} \leq x < 1).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [\frac{1}{2}, 1[,\ f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du.}$$

