A 2006 MATH. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif de ce problème est de montrer la propriété suivante : soient deux familles de réels $(a_k, k = 1, \cdots, n)$ et $(b_k, k = 1, \cdots, n)$ satisfaisant

$$0 < a_1 \leq a_k \leq a_n \text{ et } 0 < b_1 \leq b_k \leq b_n \text{ pour tout } k \in \{1, \cdots, n\},$$

les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2} \leq \frac{(a_n b_n + a_1 b_1)^2}{4 a_1 b_1 a_n b_n}. \tag{1}$$

On désignera dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,p}$ l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes. On note $0_{n,p}$, la matrice nulle.
- $\mathcal{M}_n$, l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n. On note 0_n, la matrice nulle.
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.
- $\mathcal{S}_n$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$, constitué des matrices symétriques d'ordre n, c'est-à-dire les matrices A qui satisfont ${}^tA = A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n.
- $(X \mid Y)$ le produit scalaire de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$ et tout couple de matrices colonnes (X,Y) où $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}$, l'identité suivante est satisfaite :

$$(AX \mid Y) = (X \mid {}^tAY).$$

Définition 1 *Une matrice A est dite positive lorsque pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX \mid X) \geq 0$. Une matrice A est dite définie positive lorsque pour tout $X \neq 0$ de $\mathcal{M}_{n,1}$, $(AX \mid X) > 0$.*

I. Préliminaires

Dans cette partie, A est un élément de $\mathcal{S}_n$.

1) Montrer que A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives.

2) Montrer que A est définie positive si et seulement si A est positive et inversible.

3) Si A est définie positive, montrer qu'il existe une matrice C, symétrique définie positive telle que $C^2 = A$.

4) Si A et C sont symétriques définies positives et $C^2 = A$, montrer que, pour toute valeur propre λ de A, on a :

$$\mathrm{Ker}\,(A - \lambda\,\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\,(C - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}_n).$$

5) En déduire que si A est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive telle que $C^2 = A$ et que dans toute base de vecteurs propres de A, C est diagonale.

   On notera désormais $C = A^{1/2}$.

6) On suppose A définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$.

7) Prouver que $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$.

8) Soit B une matrice symétrique positive qui commute avec A. Est-ce que $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent ?

II. Inégalité de Kantorovitch

Dans cette partie, A est une matrice fixée de $\mathcal{S}_n$, définie positive. On range les valeurs propres de A, répétées suivant leur multiplicité, dans l'ordre croissant : $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. On note m et M deux réels strictement positifs tels que $m \leq \lambda_1$ et $\lambda_n \leq M$.

9) Pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, montrer l'inégalité suivante :

$$(X \mid X)^2 \ \leq \ (AX \mid X)(A^{-1}X \mid X). \tag{2}$$

10) Quelles sont les matrices pour lesquelles cette inégalité est une égalité pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$?

Soit F la fonction polynomiale qui à tout s de $\mathbb{R}$ associe

$$F(s) = s^2 - (m+M).s + mM.$$

11) Quelles sont, en fonction de celles de A, les valeurs propres de la matrice $F(A)$?

12) Montrer que toutes les valeurs propres de $F(A)$ sont de même signe. Préciser ce signe.

13) Soit N la matrice définie par

$$N = -\left(A - (m+M)\,\mathrm{I}_n + mM\,A^{-1}\right).$$

Montrer que N est symétrique positive.

Pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on considère l'application polynomiale f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défini par :

$$f(s) = (AX \mid X).s^2 - (m+M)(X \mid X).s + (A^{-1}X \mid X)mM.$$

14) Calculer $f(0)$ et $f(1)$ et montrer que $f(0)f(1) \leq 0$.

15) Établir que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(AX \mid X)(A^{-1}X \mid X) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(X \mid X)^2. \tag{3}$$

16) Soit $\mathcal{D} = \{(m, M) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < m \leq \lambda_1 \leq \lambda_n \leq M\}$. Établir l'identité suivante :

$$\inf_{\mathcal{D}} \frac{(m+M)^2}{mM} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}.$$

17) On suppose que A n'est pas une homothétie. On considère X_1 (respectivement X_n) un vecteur colonne propre, de norme 1, pour la valeur propre λ_1 (respectivement λ_n). On pose $X = X_1 + X_n$. Calculer

$$\frac{(AX \mid X)(A^{-1}X \mid X)}{(X \mid X)^2}.$$

18) Que peut-on en déduire sur l'inégalité (3) ?

III. Inégalité de Pólya-Szegö

On suppose dorénavant que A_1 et A_2 sont deux matrices symétriques, définies positives qui commutent. On note m_i (respectivement M_i), la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A_i, pour $i = 1, 2$. On pose $D = A_1 A_2^{-1}$.

19) Déterminer un réel α tel que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$(DX \mid X)(D^{-1}X \mid X) \leq \alpha (X \mid X)^2.$$

20) Exprimer $(D(A_1A_2)^{1/2}X \,|\, (A_1A_2)^{1/2}X)$ en fonction de A_1X, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$.

21) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(A_1X \,|\, A_1X)(A_2X \,|\, A_2X) \leq \alpha\,(A_1X \,|\, A_2X)^2.$$

22) Établir la relation (1).

FIN DU PROBLÈME