A 2006 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 4 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique fin des racines de la dérivée du polynôme de degré $n+1$,

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n),$$

lorsque n tend vers l'infini.

On notera cot la fonction définie sur $]0,\pi[$ par

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Cette fonction est une bijection de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$. On notera $\mathrm{Arc\,cot}$ sa fonction réciproque. Pour tout réel x, $[x]$ désignera la partie entière de x. On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\ .\ (\frac{n}{e})^n \text{ quand } n \to +\infty.$$

Les parties I et II sont indépendantes.

I. Quelques propriétés des racines de P'_n

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, P'_n admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]k, k+1[$, pour $k = 0, \dots, n-1$.

   Notons $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k \in]0,1[$, la partie fractionnaire de $x_{n,k}$.

2) Pour $n \geq 1$, en calculant les coefficients de degré $n-1$ et n de P'_n, exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k}$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}$ en fonction de n.

3) En comparant $P_n(X)$ et $P_n(n-X)$, exprimer $x_{n,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,k}$, pour tout $n \geq 1$, et pour tout $k = 0, \dots, n-1$.

4) Déterminer la valeur de $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k}$.

   Le but des questions suivantes est de montrer que, n étant fixé, la suite des $\alpha_{n,k}$ croît lorsque k croît de 0 à $n-1$.

5) Pour tout $n \geq 1$, dresser, en fonction de la parité de n, le tableau de variations de P_n.

On y fera apparaître les réels $x_{n,k}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ ainsi que les entiers $0, 1, \dots, n$. On pourra s'inspirer du modèle de la figure 1.

6) En déduire le signe de $(-1)^{n-k} P_n(x_{n,k})$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

7) En utilisant la relation $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$, déterminer le signe de $(-1)^{n-k} P_n'(x_{n-1,k})$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-2$.

8) En déduire que pour $k = 0, 1, \cdots, n-2$, on a $x_{n-1,k} > x_{n,k}$.

9) En utilisant l'idendité $P_n(X) = XP_{n-1}(X-1)$, déterminer, en fonction de k et n, le signe de $(-1)^{n-k} P_n'(1 + x_{n-1,k-1})$ pour $k = 1, \cdots, n-1$.

10) En déduire que pour $k = 1, \cdots, n-1$, on a $x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}$.

11) Conclure.

II. Un développement asymptotique

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

12) Déterminer $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid h_x \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[\}$.

Pour $x \in \mathcal{E}$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

13) Montrer que Γ est strictement positive sur $\mathcal{E}$.

14) Montrer que Γ est deux fois dérivable sur $\mathcal{E}$.

15) Exprimer pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$.

On admet que la fonction Γ satisfait, pour tout $x \in]0,1[$, la formule :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \tag{A}$$

Désormais, on pose, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

16) Montrer que Ψ est strictement croissante.

17) Établir, que pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{m \to +\infty} \left[\Psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j} - \ln m \right] = 0.$$

On pose pour tout $x > 0$,

$$\phi(x) = \Psi(x) - \ln(x).$$

18) Montrer que la série de terme général $(\phi(n+1) - \phi(n))$ converge.

19) Montrer que la suite $(\phi(n), n \geq 1)$ converge lorsque l'entier n tend vers l'infini. Soit C sa limite.

20) Établir que l'on a aussi :

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = C.$$

21) Montrer que si $C \neq 0$,

$$\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} Cx.$$

22) Montrer que $C = 0$.

23) Conclure en considérant $\Psi(x+m+1)$.

III. Comportement asymptotique des $\alpha_{n,\,k}$

24) En considérant la fraction $\dfrac{P_n'}{P_n}$, montrer que

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\alpha_{n,\,k}+j} - \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1-\alpha_{n,\,k})+j} = 0.$$

25) Pour $t \in]0{,}1[$ fixé, on pose $u_n = \alpha_{n,\,[nt]}$ pour $t \in]0,1[$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) + \ln\left(\frac{1-t}{t}\right)\right] = 0.$$

26) Démontrer que la suite $(u_n, n \geq 1)$ est convergente et calculer sa limite, que l'on notera $F(t)$.

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\ldots$	$2k$	$x_{n,2k}$	$2k{+}1$	$x_{n,2k+1}$	$2k{+}2$	$\ldots$
P_n'												
P_n												

FIG. 1 – *Modèle de tableau de variation.*

FIN DU PROBLÈME