SESSION 2006

Concours commun Mines-Ponts

SECONDE EPREUVE. FILIERE MP

I. Quelques propriétés des racines de P'_n

1) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. P_n est continu sur $[k, k+1]$, dérivable sur $]k, k+1[$ et prend la même valeur en k et $k+1$ à savoir 0. Le théorème de ROLLE permet d'affirmer que P'_n s'annule au moins une fois dans $]k, k+1[$.
Mais alors, le polynôme P'_n admet déjà au moins n racines deux à deux distinctes. Puisque P'_n est de degré n, on a trouvé toutes les racines de P'_n. P'_n s'annule donc exactement une fois dans chaque intervalle $]k, k+1[$, $0 \leq k \leq n-1$ et admet n racines réelles simples.

2) On a $P_n = X^{n+1} - (1+2+\ldots+n)X^n + \ldots = X^{n+1} - \dfrac{n(n+1)}{2}X^n + \ldots$ et donc

$$P'_n = (n+1)X^n - \frac{n^2(n+1)}{2}X^{n-1} + \ldots,$$

mais aussi

$$P'_n = (n+1)\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_{n,k}) = (n+1)X^n - (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k}\right)X^{n-1} + \ldots$$

Ceci fournit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = \frac{n^2}{2}$ puis

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{n,k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} - \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = \frac{n^2}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{n,k} = \frac{n}{2}.}$$

3) $P_n(n-X) = (n-X)((n-1)-X)\ldots(1-X)(-X) = (-1)^{n+1}X(X-1)\ldots(X-n) = (-1)^{n+1}P_n$ puis en dérivant $P'_n(n-X) = (-1)^n P'_n$.
Soit alors $k \in [\![0, n-1]\!]$. $P'_n(n - x_{n,n-1-k}) = (-1)^n P'_n(x_{n,n-1-k}) = 0$ et donc $n - x_{n,n-1-k}$ est une racine de P'_n. Enfin,

$$n-1-k < x_{n,n-1-k} < n-k \Rightarrow k < n - x_{n,n-1-k} < k+1,$$

et donc $n - x_{n,n-1-k} = x_{n,k}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_{n,n-1-k} = n - x_{n,k}.}$$

4) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k} = (x_{n,k} + x_{n,n-1-k}) - (k + n - 1 - k) = n - (n-1) = 1.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k} = 1.}$$

5) P'_n est à racines simples et donc change de signe à chaque franchissement d'un $x_{n,k}$.
Tableau de variations de P_n quand n est impair. On pose $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$.

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\dots$	$2k$	$x_{n,2k}$	$2k+1$	$x_{n,2k+1}$	$2k+2$	$\dots$	$2p$	$x_{n,2p}$	$2p+1$	$+\infty$
P'_{2p+1}		$-$	0	$+$	0	$\dots$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\dots$	$-$	0	$+$	
P_{2p+1}	$+\infty$ ↘	0 ↘	↗	0 ↗		$\dots$	0 ↘	↗	0 ↗	↘	0	$\dots$	0 ↘	↗	0 ↗	$+\infty$

Tableau de variations de P_n quand n est pair. On pose $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\dots$	$2k$	$x_{n,2k}$	$2k+1$	$x_{n,2k+1}$	$2k+2$	$\dots$	$2p-1$	$x_{n,2p-1}$	$2p$	$+\infty$
P'_{2p}		$+$	0	$-$	0	$\dots$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\dots$	$-$	0	$+$	
P_{2p}	$-\infty$ ↗	0 ↗	↘	0 ↘		$\dots$	0 ↗	↘	0 ↘	↗	0	$\dots$	0 ↘	↗	0 ↗	$+\infty$

6) Si n est pair, on a $P_n(x_{n,2k}) > 0$ et $P_n(x_{n,2k+1}) < 0$ et quand n est impair, $P_n(x_{n,2k}) < 0$ et $P_n(x_{n,2k+1}) > 0$. En résumé, le signe de $P_n(x_{n,k})$ est $(-1)^{n-k}$ ou encore

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (-1)^{n-k} P_n(x_{n,k}) > 0.}$$

7) Soit $n \geq 2$. On a $P_n = (X-n)P_{n-1}$ et donc $P'_n = P_{n-1} + (X-n)P'_{n-1}$. Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, on a alors

$$(-1)^{n-k} P'_n(x_{n-1,k}) = (-1)^{n-k} P_{n-1}(x_{n-1,k}) = -(-1)^{(n-1)-k} P_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \forall k \in [\![0, n-2]\!],\ (-1)^{n-k} P'_n(x_{n-1,k}) < 0.}$$

8) D'après 5), $(-1)^{n-k} P'_n$ est strictement positive sur $[k, x_{n,k}[$ et strictement négative sur $]x_{n,k}, k+1]$. Puisque $x_{n-1,k} \in\,]k, k+1[$ et que $(-1)^{n-k} P'_n(x_{n-1,k}) < 0$, on a donc $x_{n-1,k} > x_{n,k}$.

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \forall k \in [\![0, n-2]\!],\ x_{n-1,k} > x_{n,k}.}$$

9) Soit $n \geq 2$. On a $P_n = XP_{n-1}(X-1)$ et donc $P'_n = P_{n-1}(X-1) + XP'_{n-1}(X-1)$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a alors

$$(-1)^{n-k} P'_n(1 + x_{n-1,k-1}) = (-1)^{n-k} P_{n-1}(x_{n-1,k-1}) = (-1)^{(n-1)-(k-1)} P_{n-1}(x_{n-1,k-1}) > 0.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ (-1)^{n-k} P'_n(1 + x_{n-1,k-1}) > 0.}$$

10) Comme en 8), on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}.}$$

11) Soient $n \geq 2$ puis $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k > (1 + x_{n-1,k-1}) - k = x_{n-1,k-1} - (k-1) > x_{n,k-1} - (k-1) = \alpha_{n,k-1},$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \text{la suite } (\alpha_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1} \text{ est strictement croissante.}}$$

II. Un développement asymptotique

12) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction h_x est continue et donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$, négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Par suite, h_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si h_x est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
Or, h_x est positive et équivalente à t^{x-1} quand t tend vers 0. On en déduit que h_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x - 1 > -1$ ou encore $x > 0$.

$$\boxed{\mathcal{E} =]0, +\infty[.}$$

13) Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est strictement positive sur }]0, +\infty[.}$$

14) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit $h : \begin{array}{ccc} [a,b]\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$.

• Pour chaque x de $[a, b]$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.
• h admet sur $[a, b]\times]0, +\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 définies par

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1} \text{ et } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = (\ln t)^2 t^{x-1}.$$

Pour chaque $t \in]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues sur $[a, b]$ et pour chaque $x \in [a, b]$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Enfin, pour $(x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[$ et $k \in \{1, 2\}$,

$$\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln t|^k \max\{t^{a-1}, t^{b-1}\}e^{-t} = \varphi_k(t).$$

Pour $k \in \{1, 2\}$, la fonction φ_k est continue sur $]0, +\infty[$ (car $\max\{t^{a-1}, t^{b-1}\} = \dfrac{1}{2}(t^{a-1} + t^{b-1} + |t^{a-1} - t^{b-1}|)$), négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$, positive et équivalente en 0 à $|\ln t|^k t^{a-1}$ (car pour $t \in]0, 1]$, $t^{a-1} \geq t^{b-1}$) et donc négligeable devant $t^{-1+\frac{a}{2}}$, d'après un théorème de croissances comparées, avec $-1 + \dfrac{a}{2} > -1$. On en déduit que φ_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de Leibniz), la fonction Γ est de classe C^2 sur tout segment de $]0, +\infty[$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall k \in \{1,2\},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}\ dt.}$$

15) Soit $x \in]0, +\infty[$. Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\ dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\ dt = -A^x e^{-A} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon} + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\ dt.$$

Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

16) ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}.$$

Maintenant, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(\Gamma'(x))^2 = \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\ dt\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)t^{(x-1)/2}e^{-t/2} \times t^{(x-1)/2}e^{-t/2}\ dt\right)^2$$
$$\leq \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\ dt\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt\right) = \Gamma''(x)\Gamma(x).$$

On en déduit que ϕ' est positive sur $]0,+\infty[$ et donc que

$$\boxed{\psi \text{ est croissante sur }]0,+\infty[.}$$

17) Pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En dérivant, on obtient $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. En divisant les deux membres de cette égalité par $\Gamma(x+1)$, on obtient

$$\psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} + \frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x)}{x\Gamma(x)} + \frac{x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \psi(x).$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}.}$$

18) Quand n tend vers $+\infty$,

$$\phi(n+1) - \phi(n) = (\psi(n+1) - \psi(n)) - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la série de terme général } \phi(n+1) - \phi(n),\ n \geq 1, \text{ converge.}}$$

19) On sait que la suite de terme général $\phi(n)$, $n \geq 1$, et que la série télescopique de terme général $\phi(n+1) - \phi(n)$, $n \geq 1$, sont de même nature et donc

$$\boxed{\text{la suite } (\phi(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

20) Soit $x \in [1,+\infty[$. Puisque ψ est une fonction croissante sur $]0,+\infty[$, on a $\psi([x]) \leq \phi(x) \leq \phi([x]+1)$ puis

$$\psi([x]) - \ln x \leq \phi(x) \leq \phi([x]+1) - \ln(x).$$

Maintenant, $\psi([x]) - \ln x = \psi([x]) - \ln([x]) + \ln\left(\frac{x}{[x]}\right) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} C$ car $1 \leq \frac{x}{[x]} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$.

De même, $\psi([x]+1) - \ln x = \psi([x]+1) - \ln([x]+1) + \ln\left(\frac{x}{[x]+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} C$.

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = C.}$$

21) Supposons $C \neq 0$. Les fonctions ϕ et $t \mapsto C$ sont continues sur $[1,+\infty[$, équivalentes en $+\infty$ et en particulier de signe constant au voisinage de $+\infty$. Comme la fonction $t \mapsto C$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, les théorèmes de sommation des relations de comparaison montrent que

$$\int_1^x \phi(t)\ dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x C\ dt = C(x-1) \underset{x\to+\infty}{\sim} Cx.$$

22) Pour $x > 0$,

$$\int_1^x \phi(t)\ dt = \int_1^x \left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} - \ln t\right)\ dt = \ln|\Gamma(x)| - \ln|\Gamma(1)| - x\ln x + x - 1 = \ln(\Gamma(x)) - x\ln x + x - 1.$$

En particulier, pour n entier naturel non nul,

$$\int_1^n \phi(t)\ dt = \ln(\Gamma(n)) - n\ln n + n - 1 = \ln((n-1)!) - n\ln n + n - 1 = \ln\left(\frac{(n-1)!e^n}{e\times n^n}\right) = \ln\left(\frac{n!e^n}{e\times n^{n+1}}\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, la formule de Stirling fournit $\frac{n!e^n}{e\times n^{n+1}} \sim \frac{n^n e^n\sqrt{2\pi n}}{e\times e^n n^{n+1}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e\sqrt{n}}$ et donc

$$\int_1^n \phi(t)\ dt \sim \ln\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{e\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{2}\ln n.$$

En particulier, $\displaystyle\int_1^n \phi(t)\ dt = o(n)$ ce qui n'est pas si $C \neq 0$ d'après la question 21). Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(\psi(x) - \ln(x)) = 0.}$$

23) Soient $x \in]0,+\infty[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 17), on a

$$\psi(x+m+1) = \psi(x) + \sum_{j=0}^{m}(\psi(x+j+1) - \psi(x+j)) = \psi(x) + \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j},$$

et donc

$$\begin{aligned}\psi(x) + \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j} - \ln m &= \psi(x+m+1) - \ln m = \psi(x+m+1) - \ln(x+m+1) + \ln\left(\frac{x+m+1}{m}\right)\\ &= \phi(x+m+1) + \ln\left(\frac{x+m+1}{m}\right).\end{aligned}$$

Quand m tend vers $+\infty$ à x fixé, cette dernière expression tend vers 0 et on a monté que

$$\boxed{\forall x > 0,\ \lim_{m\to+\infty}\left(\psi(x) + \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j} - \ln m\right) = 0.}$$

III. Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

24) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque $P_n = X(X-1)\dots(X-n)$, on a l'identité

$$\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{X-i}.$$

Puisque P_n est à racines simples, $x_{n,k}$ n'est pas racine de P_n et on peut évaluer en $x_{n,k}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{x_{n,k}-i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\alpha_{n,k}+k-i}\\ &= \sum_{j=-(n-k)}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j} = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j} + \sum_{j=-(n-k)}^{-1}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j}\\ &\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j} + \sum_{j'=0}^{n-k-1}\frac{1}{\alpha_{n,k}-(j'+1)} \text{ (en posant } j = -(j'+1))\\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j} - \sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{1}{(1-\alpha_{n,k})+j}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j} - \sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{1}{(1-\alpha_{n,k})+j} = 0.}$$

25) Soient $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $k = [nt]$. k est un entier élément de $[\![0, n-1]\!]$. D'après la question 23)

$$\psi(u_n+k+1) = \psi(u_n) + \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{u_n+j} = \psi(u_n) + \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j},$$

et

$$\psi(1-u_n+n-k)=\psi(1-u_n)+\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{1}{1-u_n+j}=\psi(1-u_n)+\sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{1}{(1-\alpha_{n,k})+j}.$$

D'après la question précédente, on a alors

$$\begin{aligned}\phi(u_n+k+1)-\phi(1-u_n+n-k)&=(\psi(u_n+k+1)-\ln(u_n+k+1))-(\psi(1-u_n+n-k)-\ln(1-u_n+n-k))\\&=\psi(u_n)-\psi(1-u_n)-\ln\left(\frac{u_n+k+1}{1-u_n+n-k}\right).\end{aligned}$$

Maintenant, $u_n+k+1\geq 0+(nt-1)+1=nt$ et $1-u_n+n-k\geq 0+n-(nt)=(1-t)n$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+k+1=\lim\limits_{n\to+\infty}1-u_n+n-k=+\infty$. D'après la question 22), on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\phi(u_n+k+1)-\phi(1-u_n+n-k)=0.$$

D'autre part, comme $u_n\in[0,1]$,

$$\frac{u_n+k+1}{1-u_n+n-k}=\frac{u_n+[nt]+1}{1-u_n+n-[nt]}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{nt}{n(1-t)}=\frac{t}{1-t}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}-\ln\left(\dfrac{u_n+k+1}{1-u_n+n-k}\right)=\ln\left(\dfrac{1-t}{t}\right)$ et donc que

$$\boxed{\forall t\in]0,1[,\ \lim_{n\to+\infty}\left[\psi(u_n)+\psi(1-u_n)+\ln\left(\frac{1-t}{t}\right)\right]=0.}$$

26) Pour $x\in]0,1[$, on a $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ et donc $\ln(\Gamma(x))+\ln(\Gamma(1-x))=\ln(\pi)-\ln(\sin(\pi x))$. En dérivant on obtient

$$\psi(x)-\psi(1-x)=-\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=-\pi\cot(\pi x).$$

D'après la question 25), on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\pi\cot(\pi u_n)+\ln\left(\dfrac{1-t}{t}\right)\right]=0$ et donc, puisque $\pi u_n\in]0,\pi[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{\pi}\text{Arc cot}\left[\dfrac{1}{\pi}\ln\left(\dfrac{1-t}{t}\right)\right]$.

$$\boxed{\forall t\in]0,1[,\ \lim_{n\to+\infty}\alpha_{n,[nt]}=\frac{1}{\pi}\text{Arc cot}\left[\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{1-t}{t}\right)\right].}$$

