SESSION 2006

Concours commun Mines-Ponts

PREMIERE EPREUVE. FILIERE M

I Un vecteur propre strictement positif

1) et 2) Soient $x \in B$ puis $\theta \in \mathbb{R}^+$. Puisque $x \geq 0$ et $T \geq 0$, on a bien sûr $Tx \geq 0$ et donc, chaque x_i et chaque $(Tx)_i$ est positif ou nul. De plus, l'un au moins des x_i est non nul et donc strictement positif. Par suite,

$$\begin{aligned}\theta \in \Gamma_x &\Leftrightarrow \theta x \leq Tx \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ (\theta x)_i \leq (Tx)_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } x_i \neq 0,\ \theta \leq \frac{(Tx)_i}{x_i} \\ &\Leftrightarrow \theta \leq \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i} / \ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $\theta(x) = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i} / \ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}$, on a $\Gamma_x = [0, \theta(x)]$ et en particulier, Γ_x est non vide, fermé et borné.

$$\boxed{\forall x \in B,\ \Gamma_x = [0, \theta(x)] \text{ où } \theta(x) = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i} / \ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\}.}$$

3) Soient $x \in B$ et $\alpha \in]0, +\infty[$. Alors les $(\alpha x)_i$ sont positifs et l'un d'entre eux au moins est strictement positif ce qui montre que $\alpha x \in B$. De plus, $(\alpha x)_i > 0 \Leftrightarrow x_i > 0$ et donc

$$\theta(\alpha x) = \min\left\{\frac{(T\alpha x)_i}{(\alpha x)_i} / \ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\} = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i} / \ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\} = \theta(x).$$

$$\boxed{\forall x \in B,\ \forall \alpha > 0,\ \alpha x \in B \text{ et } \theta(\alpha x) = \theta(x).}$$

4) Soit $x \in B$. Puisque P est positive, on a $Px \in B$. De plus, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} > 0$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$(Px)_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_j \geq p_{i,i_0} x_{i_0} > 0,$$

et donc $Px \in B^+$.

$$\boxed{P(B) \subset B^+.}$$

5) Soit $x \in B$. Après développement, la matrice P s'écrit $I_n + U$ où $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est positive. Pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(Px)_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_j = x_i + \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} x_j \geq x_i.$$

Mais alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, en posant $x'_i = (Px)_i$,

$$(TPx)_i = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} x'_j \geq \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} x_i = (Tx)_i \geq \theta(x) x_i,$$

et en particulier, $\theta(Px) = \min\left\{\frac{(TPx)_i}{x_i},\ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\} \geq \theta(x)$.

Vérifions maintenant que $Tx \neq 0$. Dans le cas contraire, $Tx = 0$. Comme $x \neq 0$, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_j > 0$. Mais alors en posant $T = (t_{k,l})_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$ on a

$$0 = \sum_{k=1}^{n} t_{i,k} x_k \geqslant t_{i,j} x_j \geqslant 0,$$

et donc chaque $t_{i,j}x_j$ est nul puis chaque $t_{i,j}$ est nul. Ainsi, la j-ème colonne de T est nulle ou encore la j-ème colonne de $I_n + T$ est la j-ème colonne e_j de I_n. Il en est de même de la j-ème colonne de $(I_n + T)^{n-1} = P$ ce qui contredit le fait que la matrice P est tristement positive.
Donc, Tx est positif et non nul ou encore $Tx \in B$. D'après la question 4) et puisque P est un polynôme en T, on en déduit que $T(Px) = P(Tx) \in B^+$ et donc que $\theta(Px) = \min\left\{\dfrac{(TPx)_i}{x_i},\ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\} > 0$.

$$\boxed{\forall x \in B,\ \theta(Px) \geq \theta(x) \text{ et } \theta(Px) > 0.}$$

6) Soient $x \in B$ un vecteur propre de T puis $\lambda \in \mathbb{R}$ la valeur propre associée. On a

$$\theta(x) = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i},\ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\} = \min\left\{\frac{(\lambda x)_i}{x_i},\ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0\right\} = \lambda,$$

ce qui montre que $\lambda \geq 0$. Le vecteur x est encore un vecteur propre de P associé à la valeur propre $\alpha = (1+\lambda)^{n-1}$ avec $\alpha > 0$. D'après la question 3)

$$\theta(Px) = \theta(\alpha x) = \theta(x).$$

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est un vecteur propre de } T \text{ élément de } B,\ \theta(Px) = \theta(x) > 0.}$$

7) Soient $x \in B$ puis $\lambda = \theta(x) \in [0, +\infty[$. Le vecteur $y = Tx - \lambda x$ est positif ou nul. Si ce vecteur n'est pas nul, il est dans B de sorte que $Py > 0$ d'après 4). Maintenant P est un polynôme en T et en particulier commute avec T. Comme on a vu en 5) que $Px \geq x$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
Py > 0 &\Rightarrow PTx > \lambda Px \Rightarrow TPx > \lambda Px \Rightarrow TPx > \lambda x\\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } x_i \neq 0,\ \frac{(TPx)_i}{x_i} > \lambda\\
&\Rightarrow \theta(Px) > \lambda = \theta(x).
\end{aligned}$$

Par contraposition, $\theta(Px) = \theta(x) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow Tx = \theta(x)x$ ce qui montre que x est vecteur propre de T associé à la valeur propre $\theta(x)$.

$$\boxed{\forall x \in B,\ \theta(Px) = \theta(x) \Leftrightarrow x \text{ est vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } \theta(x).}$$

8) $C = \{(x_i)_{1\leq i\leq n} /\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geq 0 \text{ et } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$. On a $P(C) \subset P(B) \subset B^+$. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, les applications $x \mapsto (Tx)_i$ et $x \mapsto x_i$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ et donc continues sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $x \mapsto \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ est continue sur B^+ et donc sur $P(C)$ en tant que quotient d'applications continues sur B^+ dont le dénominateur ne s'annule pas sur B^+. Finalement, l'application θ est continue sur B^+ et donc sur $P(C)$ en tant que minimum d'un nombre fini d'applications continues sur B^+.

$$\boxed{\theta \text{ est continue sur } P(C).}$$

9) C est contenu dans Σ et donc C est borné. De plus, chaque demi-espace défini par $x_i \geq 0$ et l'hyperplan affine d'équation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ sont des fermés de $\mathbb{R}^n$. C est donc un fermé de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'intersection de fermés.
C est une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^n$ et donc un compact de $\mathbb{R}^n$ d'après le théorème de Borel-Lebesgue. Par suite, $P(C)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'image d'un compact par une application continue (P étant linéaire en dimension finie).

θ est continue sur le compact $P(C)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. θ admet donc un maximum sur $P(C)$ ou encore

$$\boxed{\exists x_0 \in P(C)/\ \theta(x_0) = \sup_{x\in P(C)} \theta(x).}$$

10) Soit $x \in C$. D'après 5), $\theta(x) \leq \theta(P(x)) \leq \displaystyle\sup_{y\in P(C)} \theta(y)$. Ainsi, $\displaystyle\sup_{y\in P(C)} \theta(y)$ est un majorant de $\{\theta(x),\ x \in C\}$ et donc

$$\boxed{\sup_{x\in C} \theta(x) \leq \sup_{y\in P(C)} \theta(y).}$$

11) On a $C \subset B$ et donc $\sup_{x \in C} \theta(x) \leq \sup_{x \in B} \theta(x)$.
Soit alors $x \in B$. x n'est pas nul et donc $\|x\|_1 > 0$. Mais alors d'après 3)

$$\theta(x) = \theta\left(\|x\|_1 \frac{x}{\|x\|_1}\right) = \theta\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \leq \sup_{y \in C} \theta(y).$$

Ainsi, $\sup_{y \in C} \theta(y)$ est un majorant de $\{\theta(x),\ x \in B\}$ et donc $\sup_{x \in B} \theta(x) \leq \sup_{y \in C} \theta(y)$. Finalement

$$\boxed{\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{y \in C} \theta(y).}$$

12) D'après 10), on a $\sup_{x \in C} \theta(x) \leq \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$. Mais d'autre part, $P(C) \subset P(B) \subset B^+ \subset B$ et donc $\sup_{y \in P(C)} \theta(y) \leq \sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x)$ d'après 11). Finalement,

$$\boxed{\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{y \in P(C)} \theta(y) = \theta(x_0).}$$

13) x_0 est l'image par P d'un élément de $C \subset B$ et donc $x_0 \in B^+$. On sait d'après 5) que $\theta(P(x_0)) \geq \theta(x_0)$ mais d'autre part, $\theta(P(x_0)) \leq \sup_{y \in P(C)} \theta(y) = \theta(x_0)$. Finalement, x_0 est un élément de B^+ tel que $\theta(Px_0) = \theta(x_0) = \theta_0$ et d'après la question 7)

$$\boxed{x_0 \text{ est un vecteur strictement positif tel que } Tx_0 = \theta_0 x_0.}$$

Enfin, $\theta_0 = \theta(x_0) = \theta(Px_0) > 0$ d'après 5).

II Une méthode d'approximation

14) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque les $t_{i,j}$ sont des réels positifs,

$$(Tx^+)_i = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j}|x_j| \geq \left|\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j\right| = |(Tx)_i| = |(\theta x)_i| = (|\theta|x^+)_i,$$

et donc

$$\boxed{|\theta|x^+ \leq Tx^+.}$$

15) Ainsi, $|\theta| \in \Gamma_{x^+}$ et donc $|\theta| \leq \theta(x^+) \leq \sup_{y \in B} \theta(y) = \sup_{y \in C} \theta(y) = \theta_0$.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathrm{Sp}(T),\ |\theta| \leq \theta_0.}$$

16) De la question 14), on déduit

$$\begin{aligned} |\theta|\|x^+\|_1 \leq \|Tx^+\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}|x_j|\right| = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}|x_j|\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_{i,j}\right)|x_j| = \sum_{j=1}^{n}|x_j| = \|x^+\|_1. \end{aligned}$$

Donc, $|\theta|\|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1$ et finalement puisque $\|x^+\|_1 > 0$,

$$\boxed{|\theta| \leq 1.}$$

17) En particulier $\theta_0 \leq 1$ car θ_0 est une valeur propre de T associée à $x_0 = x_0^+$. Mais d'autre part, 1 est valeur propre de ${}^tT$ associée au vecteur propre $(1, \ldots, 1)$ t donc 1 est valeur propre de T. On a donc aussi $\theta_0 \geq |1| = 1$. Finalement

$$\boxed{\theta_0 = 1.}$$

18) Soient A et B deux matrices stochastiques. Montrons que $A \times B = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est encore une matrice strochastique. Déjà, la matrice AB est positive. Soit alors $j \in [\![1, n]\!]$.

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\right) b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} = 1.$$

Ainsi, un produit de matrices stochastiques est stochastiques. Maintenant, les matrices I_n et T sont stochastiques puis, par récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$, T^j est stochastique.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $T^j = (t^{(j)}_{u,v})_{1\leq u,v\leq n}$. La matrice R_k est positive et pour $v \in [\![1, n]\!]$

$$\sum_{u=1}^{n} r^{(k)}_{u,v} = \sum_{u=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} t^{(j)}_{u,v}\right) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{u=1}^{n} t^{(j)}_{u,v}\right) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} 1 = \frac{k}{k} = 1.$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ T^j \text{ est stochastique et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ R_k \text{ est stochastique.}}$$

19) Soit $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$.

$$\|Tx\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_{i,j}\right)|x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|x\|_1.$$

On en déduit que $\|T\|_1 \leq 1$. Ensuite, pour $j \in \mathbb{N}^*$, puisqu'une norme subordonnée est sous-multiplicative, $\|T^j\|_1 \leq \|T\|_1^j \leq 1$ ce qui reste clair pour $j = 0$. Enfin, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|R_k\|_1 \leq \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \|T^j\|_1 \leq \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} 1 = 1.$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \|T^j\|_1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|R_k\|_1 \leq 1.}$$

20) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\|TR_k - R_k\|_1 = \left\|\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^{j+1} - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j\right\|_1 = \frac{1}{k}\|T^k - I_n\|_1 \leq \frac{1}{k}(\|Tk\|_1 + \|I_n\|_1) \leq \frac{2}{k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|TR_k - R_k\|_1 \leq \frac{2}{k}.}$$

21) Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\|R_kx\|_1 \leq \|R_k\|_1\|x\|_1 \leq \|x\|_1$. Ainsi, la suite $(R_kx)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Puisque $\mathbb{C}^n$ est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer qu'on peut extraire de la suite $(R_kx)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente $(R_{\varphi(k)}x)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ou encore, ce qui revient au même

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \text{la suite } (R_kx)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ admet au moins une valeur d'adhérence.}}$$

22) Avec les notations précédentes, posons $y = \lim\limits_{k\to+\infty} R_{\varphi(k)}x$. D'après la question 20), pour tout entier naturel non nul k on a

$$\|TR_{\varphi(k)}x - R_{\varphi(k)}x\|_1 \leq \|TR_{\varphi(k)} - R_{\varphi(k)}\|_1 \leq \frac{2}{\varphi(k)}\|x\|_1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} TR_{\varphi(k)}x - R_{\varphi(k)}x = 0$ ou encore $Ty - y = 0$. Ensuite, pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$R_ky = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^jy = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} y = y.$$

$$\boxed{Ty = y \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ R_ky = y.}$$

23) Soient y et z deux valeurs d'adhérence de la suite $(R_k x)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Soient l et m deux entiers naturels. R_l et R_m sont des polynômes en T et donc R_l et R_m commutent. Comme $R_m y = y$ et $R_l z = z$, on en déduit que

$$R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y) = R_l R_m x - R_l z - R_m R_l x + R_m y = y - z.$$

24) On en déduit que $\forall (l, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|y - z\|_1 \leq \|R_l(R_m x - z)\|_1 + \|R_m(R_l x - y)\|_1 \leq \|R_l\|_1 \|R_m x - z\|_1 + \|R_m\|_1 \|R_l x - y\|_1 \leq \|R_m x - z\|_1 + \|R_l x - y\|_1.$$

Maintenant, on peut extraire de la suite $(R_l x)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(R_{\varphi(l)} x)_{l\in\mathbb{N}^*}$, convergente de limite y et de la suite $(R_m x)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(R_{\varphi'(m)} x)_{m\in\mathbb{N}^*}$, convergente de limite z. D'après ce qui précède, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\|y - z\|_1 \leq \|R_{\varphi'(k)} x - z\|_1 + \|R_{\varphi(k)} x - y\|_1$. Quand k tend vers $+\infty$, on obtient $\|y - z\|_1 \leq 0$ et donc $y = z$.

Finalement, d'après la question 21), la suite $(R_k x)_{k\in\mathbb{N}^*}$ admet au moins une valeur d'adhérence et d'après ce qui précède, la suite $(R_k x)_{k\in\mathbb{N}^*}$ admet au plus une valeur d'adhérence. On a donc montré que

$\boxed{\forall x \in \mathbb{C}^n, \text{ la suite } (R_k x)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une valeur d'adhérence et une seule.}}$

25) Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Puisque la suite $(R_k x)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et admet une valeur d'adhérence et une seule, on en déduit que la suite $(R_k x)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge. Maintenant, l'application $x \mapsto \lim\limits_{k\to+\infty} R_k x$ est linéaire et donc il existe $R \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ telle que $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $Rx = \lim\limits_{k\to+\infty} R_k x$. On a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} R_k = R$ et il est clair que R est une matrice réelle positive, stochastique.

26) L'application $f : M \mapsto TM - MT$ est continue car linéaire en dimension finie. On en déduit que pour $x \in \mathbb{C}^n$,

$$TR - RT = f(\lim_{k\to+\infty} R_k) = \lim_{k\to+\infty} f(R_k) = \lim_{k\to+\infty} (TR_k - R_k T) = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0.$$

$\boxed{R \text{ et } T \text{ commutent.}}$

27) D'après la question 20), pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $\|TR_k - R_k\|_1 \leq \dfrac{2}{k}$. Quand k tend vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} (TR_k - R_k) = 0$ et donc $TR = R$. Mais alors pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$RR_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} RT^j = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} R = R,$$

et quand k tend vers $+\infty$, on obtient

$\boxed{RT = TR = R \text{ et } R^2 = R.}$

R est donc un projecteur qui commute avec T.

28) L'égalité $TR = R$ s'écrit $(T - I_n)R = 0$ et donc $\text{Im}(R) \subset \text{Ker}(T - I_n)$.
Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(T - I_n)$. On a donc $Tx = x$ puis $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $R_k x = x$ et quand k tend vers $+\infty$, $Rx = x$. On en déduit que $x \in \text{Im}(R)$. On a montré que $\text{Ker}(T - I_n) \subset \text{Im}(R)$ et finalement que $\text{Im}(R) = \text{Ker}(T - I_n)$.

On a aussi $RT = R$ ce qui fournit $\text{Im}(T - I_n) \subset \text{Ker}(R)$ puis $\text{Im}(T - I_n) = \text{Ker}(R)$ d'après le théorème du rang.

$\boxed{R \text{ est la projection sur } \text{Ker}(T - I_n) \text{ parallèlement à } \text{Im}(T - I_n).}$

En particulier, $\text{Ker}(T - I_n)$ et $\text{Im}(T - I_n)$ sont supplémentaires.

29) Puisque $\text{Ker}(T - I_n)$ est de dimension 1, d'après les questions 13) et 17), on a $\text{Ker}(T - I_n) = \text{Vect}(x_0)$.

Soit $x \in B$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Rx = \lambda x_0$. Puisque $x \in B$, $R \geq 0$ et $x_0 > 0$, on a $\lambda \geq 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\lambda\|x_0\|_1 = \|\lambda x_0\|_1 = \|Rx\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}x_j\right| = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{i,j}x_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{i,j}\right)x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j = \|x\|_1,\end{aligned}$$

et donc $\lambda = \dfrac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}$.

$$\boxed{\forall x \in B,\ Rx = \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1} x_0.}$$

