SESSION 2005

Concours commun Mines-Ponts

SECONDE EPREUVE. FILIERE MP

I. Préliminaires

1) L'application $t\ :\ M \mapsto {}^tM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et le polynôme $X^2-1=(X-1)(X+1)$ est annulateur de t. Comme les polynômes $X-1$ et $X+1$ sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux fournit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}(t-\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})\oplus\mathrm{Ker}(t+\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ ou encore

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

2) Soient $M=(m_{k,l})_{1\leq k,l\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

$$ME_{i,j}=\sum_{1\leq k,l\leq n}m_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}=\sum_{1\leq k,l\leq n}\delta_{l,i}m_{k,l}E_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}m_{k,i}E_{k,j},$$

et donc

$$\mathrm{tr}(ME_{i,j})=\sum_{k=1}^{n}m_{k,i}\mathrm{tr}(E_{k,j})=\sum_{k=1}^{n}\delta_{k,j}m_{k,i}=m_{j,i}.$$

$$\boxed{\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{tr}(ME_{i,j})=m_{j,i}.}$$

3) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall T\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(MT)=0$. En particulier, pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, puisque $E_{i,j}-E_{j,i}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

$$0=\mathrm{tr}(M(E_{i,j}-E_{j,i}))=\mathrm{tr}(ME_{i,j})-\mathrm{tr}(ME_{j,i})=m_{j,i}-m_{i,j}.$$

Ainsi, pour $i\neq j$, $m_{j,i}=m_{i,j}$ et donc $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ ((\forall T\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(MT)=0)\Rightarrow M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})).}$$

4) Soit $T\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. L'application t est un endomorphisme de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et donc t est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que

$${}^te^T={}^t\left(I+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{T^p}{p!}\right)=I+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{({}^tT)^p}{p!}=I+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-T)^p}{p!}=e^{-T}=(e^T)^{-1}.$$

Ainsi, e^T est inversible d'inverse ${}^te^T$ et donc e^T est une matrice orthogonale.

$$\boxed{\forall T\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ e^T\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R}).}$$

5) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que la norme subordonnée $\|\ \|$ est sous-multiplicative. Pour $s\in\mathbb{R}^*$, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2}\|e^{sM}-I-sM\|&=\frac{1}{s^2}\left\|\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{s^p}{p!}M^p\right\|\\&\leq\frac{1}{s^2}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{|s|^p}{p!}\|M\|^p=\frac{1}{s^2}(\|e^{|s|\|M\|}-1-|s|\|M\|).\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers $\dfrac{\|M\|^2}{2}$ et est en particulier bornée sur un voisinage de 0.

Ainsi, $\dfrac{1}{s^2}(e^{sM} - I - sM) \underset{s\to 0}{=} O(1)$ ou encore $e^{sM} \underset{s\to 0}{=} I + sM + O(s^2)$.

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ e^{sM} \underset{s\to 0}{=} I + sM + O(s^2).}$$

6) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. L'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ qui à une matrice M associe le n^2-uplet de ses coefficients est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire et l'application qui à $(m_{1,1}, \dots, m_{n,n})$ associe $\alpha_j(M)$ est continue car polynomiale en les $m_{i,j}$. On en déduit que

$$\boxed{\forall j \in [\![0, n]\!], \text{ l'application } M \mapsto \alpha_j(M) \text{ est continue sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

7) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $f(s) = \det(I + sM)$. f est un polynôme en s et en particulier

$$f(s) \underset{s\to 0}{=} f(0) + sf'(0) + O(s^2) = 1 + sf'(0) + O(s^2).$$

Maintenant, on sait que si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où les $a_{i,j}$ sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est dérivable sur I et

$$(\det(A))' = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n),$$

où les C_i sont les colonnes de A. Redémontrons-le. $\det A$ est dérivable sur I en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur I et

$$\begin{aligned}(\det A)' &= \left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}\right)' = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(n),n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n).\end{aligned}$$

On note maintenant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M et on note $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on a alors $f(s) = \det(e_i + sC_i)_{1\leq i\leq n}$ et donc

$$f'(0) = \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, \dots, C_i, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = \mathrm{tr}(M).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(I + sM) \underset{s\to 0}{=} 1 + s\,\mathrm{tr}(M) + O(s^2).}$$

Ensuite, si on ajoute à chaque coefficient de la matrice $I + sM$ une expression dominée par s^2 quand s tend vers 0, les termes de degrés 0 et 1 du développement précédent ne sont pas modifiés et donc

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(I + sM + O(s^2)) \underset{s\to 0}{=} 1 + s\,\mathrm{tr}(M) + O(s^2).}$$

8) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de M dans $\mathbb{C}$. Il existe alors T matrice triangulaire supérieure complexe dont les coefficients diagonaux sont les λ_i et P matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{C}$ telles que $M = PTP^{-1}$. Soient $D = \mathrm{diag}(d_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ puis $N = PDP^{-1}$. Pour tout réel s, on a

$$\det(M + sN) = \det(T + sD) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + sd_i).$$

On suppose alors avoir numéroté les λ_i de sorte que les k premiers sont des réels strictement positifs, les l suivants sont des réels strictement négatifs, les m suivants sont nuls et les $2p$ derniers sont non réels et 2 à 2 conjugués (M étant à coefficients réels), les entiers k, l et p pouvant être nuls et l'entier m étant au moins égal à 1 (puisque M n'est pas inversible).

On prend alors pour D la matrice $D_0 = \text{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, (-1)^l, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ où on a écrit tout d'abord k fois le 1, l fois le -1 puis $(-1)^l$ puis $m-1$ fois le 1 et enfin $2p$ fois le 0. On pose aussi $N_0 = PD_0P^{-1}$.

Dans le produit $\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + sd_i)$, les k premières parenthèses sont strictement positives sur $]0, +\infty[$, le signe du produit des l facteurs suivants sur $]0, +\infty[$ est $(-1)^k$ et comme le $k+l+1$-ème facteur est $(-1)^k s$, le produit des facteurs n° $k+1, \ldots, k+l+1$ est strictement positif sur $]0, +\infty[$. On trouve ensuite s^{m-1} qui est strictement positif sur $]0, +\infty$ et en fin le produit des modules de complexes non réels qui est un réel strictement positif.

Pour ce choix de N_0, on a : $\forall s > 0,\ \det(M + sN_0) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + sd_i) > 0$.

9) Dans tous les cas, on a fourni une matrice N_0 diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car semblable dans $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale. Si maintenant, M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, on peut choisir P réelle de sorte que N_0 est semblable dans $\mathbb{R}$ à une matrice diagonale et donc est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$).
Si de plus, M est symétrique réelle, on peut choisir P orthogonale réelle. Mais alors, N_0 est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle et donc symétrique réelle.

II. Démonstration de l'inégalité (1)

10) Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si A et B commutent, d'après le théorème spectral et le résultat admis P_1, il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(a_k)_{1 \leq k \leq n} = D$ et $P^{-1}BP$ soit une matrice diagonale D'. Les coefficients diagonaux de D' sont les valeurs propres de B apparaissant dans un ordre peut-être différent de celui de l'énoncé . Il existe donc σ une permutation de $[\![1, n]\!]$ telle que $D' = \text{diag}(b_{\sigma(k)})_{1 \leq k \leq n}$. Mais alors

$$\det(A + B) = \det(P(D + D')P^{-1}) = \det(D + D') = \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}).$$

11) • Pour chaque $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = 1$ et donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• L'application $M \mapsto ({}^tM, M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie et l'application $(M, N) \mapsto MN$ est continue sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que l'application $\varphi\ :\ M \mapsto {}^tMM$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que composée d'applications continues. Mais alors, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I\})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{I\}$ par l'application continue φ.

Finalement, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Borel-Lebesgue permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie compacte de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

12) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $f_1\ :\ U \mapsto UM$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire. Il en est de même de l'application $f_2\ :\ U \mapsto M^tU$. Mais alors l'application $f\ :\ U \mapsto UM^tU$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $f = f_2 \circ f_1$.

Mais alors $\mathcal{O}_n(M) = f(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est l'image continue d'un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est donc un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, l'application $C \mapsto \det(A + C)$ est continue sur le compact $\mathcal{O}_n(B)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, cette application admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou encore

$$\boxed{\exists B_0 \in \mathcal{O}_n(B) / \det(A + B_0) = \max_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \{\det(A + C)\}.}$$

II.1 $A + B_0$ inversible

13) Quand s tend vers 0, d'après 5),

$$A + e^{sT}B_0e^{-sT} = A + (I + sT + O(s^2))B_0(I - sT + O(s^2)) = A + B_0 + s(TB_0 - B_0T) + O(s^2).$$

Mais alors, d'après 7),

$$\begin{aligned}\det(A+e^{sT}B_0e^{-sT}) &= \det(A+B_0+s(TB_0-B_0T)+O(s^2)) = \det(A+B_0)\det(I+s(TB_0-B_0T)(A+B_0)^{-1}+O(s^2))\\ &= \det(A+B_0)(1+s\mathrm{tr}\left((TB_0-B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)+O(s^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\det(A+e^{sT}B_0e^{-sT}) \underset{s\to 0}{=} \det(A+B_0)(1+s\mathrm{tr}\left((TB_0-B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)+O(s^2).}$$

14) Soit $s\in\mathbb{R}$. La matrice sT est anti-symétrique et donc, d'après 4), la matrice e^{sT} est une matrice orthogonale. Mais alors, la matrice B_0 étant dans $\mathcal{O}_n(B)$, il en est de même de la matrice $e^{sT}B_0e^{-sT}$. Par définition de B_0, on a

$$\psi_T(s) = \det(A+e^{sT}B_0e^{-sT}) \leq \det(A+B_0) = \psi_T(0).$$

$$\boxed{\forall s\in\mathbb{R},\ \psi_T(s)\leq\psi_T(0).}$$

15) Quand s tend vers 0,

$$\psi_T(s)-\psi_T(0) = s\det(A+B_0)\mathrm{tr}\left((TB_0-B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)+O(s^2).$$

Cette expression étant de signe constant, on doit avoir $\det(A+B_0)\mathrm{tr}\left((TB_0-B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)=0$ et donc $\mathrm{tr}\left((TB_0-B_0T)(A+B_0)^{-1}\right)=0$ puisque $\det(A+B_0)\neq 0$. Par linéarité de la trace et puisque pour toutes matrices M et N, $\mathrm{tr}(MN)=\mathrm{tr}(NM)$, on en déduit que

$$\mathrm{tr}(TB_0(A+B_0)^{-1}) = \mathrm{tr}(B_0T(A+B_0)^{-1}) = \mathrm{tr}(T(A+B_0)^{-1})B_0).$$

$$\boxed{\forall T\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(TB_0(A+B_0)^{-1}) = \mathrm{tr}(T(A+B_0)^{-1}B_0).}$$

16) La matrice B_0 est orthogonalement semblable à la matrice B et est donc symétrique réelle. Il en est de même de la matrice $(A+B_0)^{-1}$.
La matrice $M=B_0(A+B_0)^{-1}-(A+B_0)^{-1}B_0$ vérifie donc $\forall T\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(MT)=0$. D'après la question 3), on a $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Mais d'autre part, ${}^tM=(A+B_0)^{-1}B_0-B_0(A+B_0)^{-1}=-M$ et $M\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Finalement, $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\cap\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\{0\}$ (d'après 1)) et donc $B_0(A+B_0)^{-1}=(A+B_0)^{-1}B_0$.

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $A+B_0$ à gauche et à droite, on obtient $(A+B_0)B_0=B_0(A+B_0)$ et donc $AB_0=B_0A$.

$$\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B_0 \text{ commutent.}}$$

17) La matrice B_0 est semblable à la matrice B par construction. Ses valeurs propres sont donc les b_k, $1\leq k\leq n$. Puisque A et B_0 commutent et sont symétriques, d'après la question 10), il existe σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\det(A+B_0)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_{\sigma(k)})$. Comme $B\in\mathcal{O}_n(B)$, par définition de B_0, on a $\det(A+B)\leq\det(A+B_0)$ et donc il existe σ une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\det(A+B)\leq\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_{\sigma(k)})$. On a montré que

$$\boxed{\det(A+B)\leq\max_{\sigma\in\sigma_n}\left\{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_{\sigma(k)})\right\}.}$$

II.2 $A+B_0$ singulière

18) La matrice $M=A+B_0$ est symétrique réelle et non inversible. D'après les questions 8) et 9), il existe une matrice symétrique N_0 telle que $\forall s>0,\ \det(M+sN_0)>0$.

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, posons $N_k=B_0+\dfrac{1}{k}N_0$. La suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices symétriques qui converge vers B_0. Ensuite, pour chaque $k\in\mathbb{N}^*$, il existe d'après 12) une matrice $B_k\in\mathcal{O}_n(N_k)$ telle que $\det(A+B_k)=\displaystyle\max_{C\in\mathcal{O}_n(N_k)}\{\det(A+C)\}$ (la matrice N_k jouant le rôle de la matrice B et la matrice B_k celui de la matrice B_0 de II.1).

Par définition de B_k,

$$\det(A + B_k) \geq \det(A + N_k) > 0,$$

de sorte que la matrice $A + B_k$ est inversible. La question 16) montre que B_k commute avec A.

19) Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $U_k \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B_k = U_k N_k U_k^{-1}$. La suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite du compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et on peut en extraire une sous-suite $(U_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers un certain élément U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. La suite $(N_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$, extraite de la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, tend vers la matrice B_0 et donc la suite $(B_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers la matrice symétrique $B' = UB_0U^{-1}$. Le spectre de B' est le spectre de B_0 et donc aussi celui de B à savoir $(b_1, \dots, b_n)$.

Maintenant, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on a $AB_{\varphi(k)} = B_{\varphi(k)}A$ et quand k tend vers $+\infty$, on obtient $AB' = B'A$. D'après 10), il existe σ permutation de $[\![1, n]\!]$ telle que $\det(A + B') = \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)})$.

Enfin, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\det(A + B) \leq \det(A + B_0) = 0 < \det(A + B_{\varphi(k)})$ et quand k tend vers $+\infty$, on obtient par continuité du déterminant

$$\det(A + B) \leq \det(A + B') = \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}),$$

ce qui démontre l'inégalité (1) dans le cas où $A + B_0$ est singulière.

III. Une permutation qui réalise le maximum

20) Montrons le résultat par récurrence.

• Pour $n = 2$, on doit simplement vérifier que $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \leq (a_1 + b_2)(a_2 + b_1)$. Or,

$$(a_1 + b_2)(a_2 + b_1) - (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geq 0,$$

ce qui démontre le résultat quand $n = 2$.

• Soit $n > 2$. Supposons acquise la propriété $\pi(n - 1)$. Soit $\sigma \in \sigma_n$.

Cas 1. Supposons que $\sigma(n) = 1$. Pour $i \in [\![1, n - 1]\!]$, on a donc $\sigma(i) \in [\![2, n]\!]$. Pour $i \in [\![1, n - 1]\!]$, posons $\tau(i) = \sigma(i) - 1$. Les $\tau(i)$, $1 \leq i \leq n - 1$, sont deux à deux distincts et éléments de $[\![1, n - 1]\!]$. τ est donc une injection de l'ensemble fini $[\![1, n - 1]\!]$ dans lui-même et par suite une permutation de $[\![1, n - 1]\!]$. On peut alors poser $b'_i = b_{i+1}$ pour $i \in [\![1, n - 1]\!]$ en déduit que

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) &= (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_{\tau(k)+1}) = (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b'_{\tau(k)}) \\
&\leq (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b'_{(n-1)-k+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence et puisque } a_n + b_1 > 0) \\
&= (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b'_{n-k}) = (a_n + b_1)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_{n-k+1}) = \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1}).
\end{aligned}$$

Cas 2. Sinon $\sigma(n)$ est un certain j élément de $[\![2, n]\!]$ et d'autre part, il existe un $i \in [\![1, n - 1]\!]$ tel que $\sigma(i) = 1$. Notons τ la transposition qui échange j et 1 et posons $\sigma' = \tau \circ \sigma$. σ' est une permutation de $[\![1, n]\!]$ telle que $\sigma'(n) = 1$ et d'après le cas 1, on a

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma'(k)}) \leq \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1}).$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) &= (a_i + b_1)(a_n + b_j)\prod_{k\neq i, k\neq n}(a_k + b_{\sigma(k)}) = (a_i + b_1)(a_n + b_j)\prod_{k\neq i, k\neq n}(a_k + b_{\sigma'(k)})\\
&\leq (a_i + b_j)(a_n + b_1)\prod_{k\neq i, k\neq n}(a_k + b_{\sigma'(k)}) \text{ (d'après le cas } n = 2 \text{ et puisque les } a_k + b_{\sigma'(k)} \text{ sont } > 0)\\
&= (a_i + b_{\sigma'(i)})(a_n + b_{\sigma'(n)})\prod_{k\neq i, k\neq n}(a_k + b_{\sigma'(k)}) = \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma'(k)})\\
&\leq \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1}) \text{ (d'après le cas 1).}
\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour toute permutation } \sigma \text{ de } [\![1, n]\!],\ \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{n-k+1}).}$$

