A 2004 Math PC 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).**

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PC.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème l'entier n est strictement positif $(n \geq 1)$; l'expression C_n^p désigne le nombre des parties ayant p éléments d'un ensemble de n éléments. Autre notation :

$$C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}.$$

Première partie

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de polynômes définies par les relations suivantes :

$$u_n(x) = x^n \ (x-1)^n \quad ; \quad P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}u_n(x).$$

Intégrale de la fonction u_n sur le segment $K = [0, 1]$:

1. Étant donnés un réel strictement positif a $(a > 0)$ et un entier naturel k $(k \in \mathbb{N})$, démontrer l'existence de l'intégrale $I_{a,\ k}$ définie ci-dessous et la calculer :

$$I_{a,\ k} = \int_0^1 x^{a-1} \ (x-1)^k \ dx.$$

2. Déduire du résultat précédent la valeur de l'intégrale de la fonction u_n , étendue au segment $K = [0, 1]$, en fonction du coefficient du binôme $C_{2\ n}^n$:

$$\int_0^1 x^n \ (x-1)^n \ dx.$$

Polynômes P_n :

3. Déterminer le degré du polynôme P_n et préciser le coefficient de son terme de plus haut degré.

4. Déterminer de deux manières différentes le polynôme P_n : la première, par dérivation de l'expression de u_n obtenue après développement ; la seconde, par dérivation du produit $x^n \ (x-1)^n$; le résultat sera exprimé en fonction d'expressions du type $x^k \ (x-1)^{n-k}$.

5. En déduire la relation :

$$C_{2\ n}^n = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2.$$

Deuxième partie

Étant donnés deux réels a et b, strictement positifs $(a > 0,\ b > 0)$, soit $J(a,\ b)$ l'intégrale suivante :

$$J(a,\ b) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$$

Intégrale $J(a,\ b)$:

6. Étudier l'existence de l'intégrale $J(a,\ b)$.

7. Démontrer que l'intégrale $J(a,\ b)$ est égale à la somme de la série de terme général $(-1)^k / (a + k\ b)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$J(a,\ b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a + k\ b}.$$

8. En déduire la somme de la série suivante :

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \ldots.$$

Étant donné un réel a strictement compris entre -1 et 1 $(-1 < a < 1)$, soit φ_a la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ par la relation suivante :

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1 - a\ x)\sqrt{1-x^2}}.$$

9. Démontrer que la fonction φ_a est intégrable sur l'intervalle ouvert I.

Soit $K(a)$ l'intégrale de la fonction φ_a étendue à l'intervalle I :

$$K(a) = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - a\ x)\sqrt{1-x^2}} \ dx.$$

10. Démontrer, pour tout réel a appartenant à l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$, la relation suivante :

$$K(a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2\ k} \int_{-1}^1 \frac{x^{2\ k}}{\sqrt{1-x^2}} \ dx.$$

11. Déterminer, en admettant le résultat suivant

$$K(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

le développement en série entière de la fonction $K : a \longmapsto K(a)$ dans un voisinage de l'origine. Préciser le rayon de convergence.

12. Exprimer, pour tout entier n strictement positif, la valeur de l'intégrale L_n ci-dessous en fonction du coefficient du binôme $C_{2\,n}^n$:

$$L_n = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2\,n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Troisième partie

Soit f la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-\infty,\ 1[$ par la relation suivante :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1,\ 1[$ par la relation suivante :

$$g(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 :

13. Déterminer le développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de l'origine 0. Préciser le rayon de convergence de la série entière. Déterminer des coefficients α_n, $n \in \mathbb{N}^*$, de façon que ce développement s'écrive sous la forme suivante :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ C_{2\,n}^n\ t^n.$$

Développement en série entière de la fonction g dans un voisinage de 0 :

14. Établir que la fonction g vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.

15. En déduire le développement en série entière de la fonction g dans un voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence R de la série entière obtenue.

16. Établir, lorsque le réel x appartient à l'intervalle ouvert de convergence de la série entière, l'expression ci-dessous de $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2\,n-1}}{n\ C_{2\,n}^n}\ x^{2\,n-1}.$$

17. Déduire des résultats précédents la somme Σ de la série suivante :

$$\Sigma = 1 + \frac{2}{3}.\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5}.\frac{1}{2^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}.\frac{1}{2^3} + \ldots.$$

Soit h la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ par la relation suivante :

$$h(x) = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x\ \arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

18. Démontrer que la fonction h est développable en série entière dans un voisinage de 0 ; déterminer des coefficients β_n, $n \in \mathbb{N}^*$, de façon que ce développement s'écrive sous la forme suivante :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{C_{2\,n}^{n}} \; x^{2\,n}.$$

19. Déduire des deux dernières questions la somme de chacune des séries de termes généraux v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et w_n, $n \in \mathbb{N}^*$, définis respectivement par les relations suivantes :

$$v_n = \frac{1}{n\; C_{2\,n}^{n}} \quad ; \quad w_n = \frac{1}{C_{2\,n}^{n}}.$$

Quatrième partie

Le but de cette partie est de montrer que, plus généralement, étant donnés une fonction F, définie et continue sur le segment $K = [0,\ 1]$, et un réel α strictement positif, il existe des coefficients $c_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$, permettant d'écrire la relation suivante :

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^{\alpha}} dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) \int_0^1 F(t)\; t^k\; dt.$$

Étant donné un réel α strictement positif ($\alpha > 0$), soit f_α la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]-\infty,\ 1[$ par la relation suivante :

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha}}.$$

Développement de la fonction f_α en série entière :

20. Déterminer le développement en série entière de la fonction f_α dans un voisinage de 0 ; préciser le rayon de convergence. Soit $c_k(\alpha)\; t^k$, $k \in \mathbb{N}$, le terme général de la série entière obtenue. Démontrer que les coefficients $c_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$, sont strictement positifs.

L'intégrale I_α est égale à la somme d'une série.

21. La fonction F étant une fonction définie et continue sur le segment $K = [0,\ 1]$, étudier, lorsque le réel α est strictement compris entre 0 et 1 $(0 < \alpha < 1)$, l'existence de l'intégrale I_α :

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^{\alpha}} dt.$$

22. Démontrer, lorsque le réel α est strictement compris entre 0 et 1 $(0 < \alpha < 1)$, la relation suivante :

$$I_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) \int_0^1 F(t)\; t^k\; dt.$$

23. Application : démontrer que le coefficient du binôme $C_{2\,n}^{n}$ est égal à la somme d'une série dont le terme général dépend de coefficients $C_{2\,k}^{k}$; choisir, par exemple, la fonction F et le réel α définis par les relations suivantes :

$$F(t) = t^{n\,-\,\frac{1}{2}} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

FIN DU PROBLÈME