SESSION 2002

Concours commun Mines-Ponts

PREMIERE EPREUVE. FILIERE MP

PREMIERE PARTIE

I-1. Fonction E :
a. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$E(x) = e^{(e^x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} e^{kx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \frac{x^n}{n!} \right).$$

Maintenant, la suite double, de terme général $\left| \frac{k^n}{k!} \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{k^n}{k!} \frac{|x|^n}{n!}$ vérifie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{k^n}{k!} \frac{x^n}{n!} \right| = e^{e^{|x|}} < +\infty.$$

On en déduit que la suite double $\left(\frac{k^n}{k!} \frac{x^n}{n!} \right)_{n \geq 0,\ k \geq 0}$ est sommable. La formule d'interversion permet alors d'écrire pour tout réel x

$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) x^n.$$

Par suite,

$$\boxed{E \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R}.}$$

b. On sait alors que E est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour $n \in \mathbb{N}$, le coefficient de x^n vaut $\frac{E^{(n)}(0)}{n!} = \frac{A_n}{n!}$. Par identification, on obtient alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.}$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $E'(x) = e^x E(x)$. Dérivons n fois cette égalité à l'aide de la formule de LEIBNIZ. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ E^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^x)^{(n-k)} E^{(k)}(x) = e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k E^{(k)}(x).$$

Pour $x = 0$, on obtient alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A_k \text{ (et } A_0 = e).}$$

On a $B_0 = \frac{1}{e} A_0$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ B_k = \frac{1}{e} A_k$. On a alors

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{n} C_n^k A_k = \frac{1}{e} A_{n+1}.$$

On a ainsi montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{e} A_n.}$$

I-2. Comparaison de sommes infinies :

a. Soit $p \geq 2$ (quand $p = 1$, $R_{p,n} = U_n$). Montrons que quand n tend vers $+\infty$,

$$S_n - R_{p,n} = \sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n = o(R_{p,n}).$$

Par hypothèse, la série de terme général u_k converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part,

$$\sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n \leq (p-1)^n \sum_{k=1}^{p-1} u_k.$$

D'autre part,

$$R_{n,p} = \sum_{k=p}^{+\infty} u_k k^n \geq p^n \sum_{k=p}^{+\infty} u_k.$$

Donc,

$$0 \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n}{R_{n,p}} \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} u_k}{\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} u_k} \left(\frac{p-1}{p}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_{p,n}.}$$

b. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un rang p tel que pour $k \geq p$, $u_k - \dfrac{\varepsilon}{2} u_k \leq v_k \leq u_k + \dfrac{\varepsilon}{2} u_k$. En sommant, il vient

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) R_{p,n}(u) \leq R_{p,n}(v) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) R_{p,n}(u).$$

p étant ainsi fixé, d'après a., quand n tend vers $+\infty$, $R_{p,n}(u) \sim U_n$ et il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$

$$U_n(1-\varepsilon) \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) R_{p,n}(u) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) R_{p,n}(u) \leq U_n(1+\varepsilon).$$

Ainsi, toujours d'après a., quand n tend vers $+\infty$, $U_n \sim R_{p,n}(v) \sim V_n$.

$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n.}$$

I-3 Fonction f_n :

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(0) = 0$ et pour $k \geq 1$, $f_n(k) = e^{-k\ln k + k + (n-1/2)\ln k}$. Par suite, quand k tend vers $+\infty$,

$$k^2 f_n(k) = e^{-k\ln k + k + (n+3/2)\ln k} \to 0.$$

Ainsi, $f_n(k) \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et la série de terme général $f_n(k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k = \dfrac{1}{k!}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^k k^{-k-1/2}$. $(u_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement positive telle que, pour tout naturel n la série de terme général $u_k k^n$, $k \geq 0$ converge. D'après I-2.a., quand n tend vers $+\infty$

$$A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k k^n \sim R_{1,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k k^n.$$

Ensuite, $(u_k)_{k\geq 1}$ et $(v_k)_{k\geq 1}$ sont deux suites strictement positives, équivalentes d'après la formule de STIRLING. On en déduit, d'aprs I-2.b., que quand n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k k^n \sim \sum_{k=1}^{+\infty} v_k k^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k).$$

Finalement,

$$\boxed{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k).}$$

DEUXIEME PARTIE

II-1. Etude de la fonction Φ_λ :
a. Soit $\lambda > 0$. Immédiatement,

$$\boxed{\Phi_\lambda(x) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda \ln x \text{ et } \Phi_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln x.}$$

b. Φ_λ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x > 0,\ \Phi'_\lambda(x) = -\ln x + \frac{\lambda}{x}.$$

Φ'_λ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]0,+\infty[$, tend vers $+\infty$ en 0 et vers $-\infty$ en $+\infty$. Φ'_λ s'annule donc une et une seule fois sur $]0,+\infty[$ en un certain réel μ de $]0,+\infty[$. De plus, Φ'_λ est strictement positive sur $]0,\mu[$ et strictement négative sur $]\mu,+\infty[$.

$$\exists!\mu \in]0,+\infty[/\ \Phi_\lambda \text{ atteint son maximum en } \mu.$$

μ est l'unique solution de l'équation $\Phi'_\lambda(\mu) = 0$, ce qui s'écrit encore $\mu\ln\mu = \lambda$. On note que puisque $\Phi'_\lambda(1) = \lambda > 0$, on a $\mu > 1$.

c. Pour $x > 1$, posons $h(x) = x\ln x$. h est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et h' ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$ ($h'(x) = 1+\ln x > 0$ pour $x > 1$). Donc, h est un C^1-difféomorphisme de $]1,+\infty[$ sur $h(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$. Sa réciproque φ est donc définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

II-2. Maximum de la fonction f_n :
a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on a $f_n(x) = e^{\Phi_{\lambda_n}(x)}$ où $\lambda_n = n - \dfrac{1}{2}$, et pour $x \leq 0$, on a $f_n(x) = 0$. Puisque la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f_n atteint sur $]0,+\infty[$ un maximum en un unique point $\mu_n = \varphi(\lambda_n) = \varphi(n-\dfrac{1}{2})$. Puisque f_n est nulle sur $]-\infty,0]$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$, $f_n(\mu_n)$ est le maximum de f_n sur $\mathbb{R}$.

f_n est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$. Mais, f_n et f'_n tendent vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. D'après un théorème classique d'analyse, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b. i. $h(1) = 0 < h(\mu_1) = \dfrac{1}{2} < h(2) = 2\ln 2 < \dfrac{3}{2} = h(\mu_2)$ et puisque h est strictement croissante sur $][1,+\infty[$,

$$\boxed{1 < \mu_1 < 2 < \mu_2.}$$

Soit $n \geq 3$. On a $h(\sqrt{n}) = \dfrac{1}{2}\sqrt{n}\ln n$, $h(\mu_n) = n - \dfrac{1}{2}$ et $h(n) = n\ln n$. Déjà, puisque $n \geq 3$, $n\ln n \geq n\ln 3 > n > n - \dfrac{1}{2}$ et $n > \mu_n$. Soit alors pour $x \geq 3$, $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\ln x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}\ln x$.

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} = \frac{2x+1-2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+1}{4x\sqrt{x}} > 0.$$

k est donc strictement croissante sur $[3,+\infty[$ et

$$k(x) \geq k(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\ln 3) > \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{5}{2} - \ln 3) > \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{5}{2} - \ln e^2) = \frac{1}{2\sqrt{3}} > 0.$$

L'autre inégalité est donc démontrée.

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ \sqrt{n} < \mu_n < n.}$$

ii. D'après a., $\forall n \geq 3,\ \mu_n \geq \sqrt{n}$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mu_n = +\infty.}$$

Ensuite,

$$\frac{\mu_n}{n} = \frac{\mu_n \ln(\mu_n)}{n \ln(\mu_n)} = \frac{n - \dfrac{1}{2}}{n \ln(\mu_n)} = \frac{1 - 1/(2n)}{\ln(\mu_n)} \to 0$$

et donc

$$\boxed{\mu_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n).}$$

iii. Soit $\alpha \in]0,1[$. Puisque $\alpha > 0$ et $1 - \alpha > 0$, les théorèmes de croissances comparées remettent d'écrire

$$\frac{\mu_n}{n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha} - 1/(2n^\alpha)}{\ln(\mu_n)} \geq \frac{n^{1-\alpha} - 1/(2n^\alpha)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Donc

$$\boxed{\forall \alpha \in]0,1[,\ n^\alpha = o(\mu_n).}$$

TROISIEME PARTIE

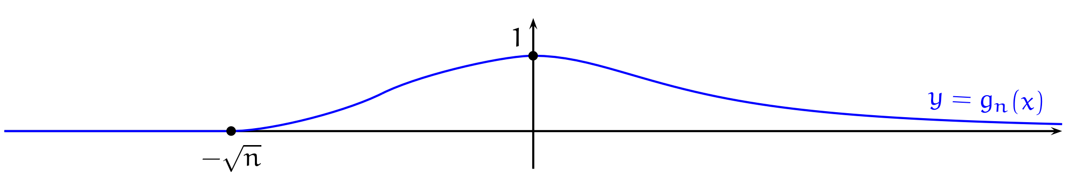
III-1. Propriétés de la fonction g_n :

a. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_n(\mu_n) g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\mu_n}} x - \sqrt{n}\right) = f_n\left[\mu_n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\mu_n}} x - \sqrt{n}\right)\right)\right] = f_n(x).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = f_n(\mu_n) g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\mu_n}} x - \sqrt{n}\right).}$$

b. g_n est continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -\sqrt{n}]$. Pour $x \in]-\sqrt{n}, 0]$, on a $0 < \mu_n(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}) < \mu_n$ et g_n est strictement croissante sur $[-\sqrt{n}, 0]$. g_n atteint son maximum en 0 et ce maximum vaut 1, puis g_n est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.



c. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$$g_n(x) = \frac{1}{f_n(\mu_n)} f_n\left[\mu_n\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] = \exp\left[\Phi_{n-1/2}\left(\mu_n\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) - \Phi_{n-1/2}(\mu_n)\right],$$

et donc, pour $n > x^2$, d'après la formule admise en fin de II-1, on a

$$g_n(x) = \exp\left(\left(\mu_n - n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 + \frac{x}{\sqrt{n}})\right) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{x}{\sqrt{n}})\right).$$

D'après II.2.ii., $\mu_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ et donc

$$\left(\mu_n - n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right) \underset{n\to+\infty}{=} (-n+o(n))(\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})) = -\frac{x^2}{2} + o(1).$$

D'autre part

$$-\mu_n\frac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) \underset{n\to+\infty}{=} -\mu_n\frac{x^2}{n} + o(\frac{\mu_n}{n}) \underset{n\to+\infty}{=} o(1).$$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{n-1/2}\left(\mu_n\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) - \Phi_{n-1/2}(\mu_n) = -\frac{x^2}{2}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction } x\mapsto e^{-x^2/2}.}$$

d. Soient n un entier naturel non nul et x un réel tel que $x > -\sqrt{n}$. On rappelle que

$$g_n(x) = \exp\left(\left(\mu_n - n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right) - \mu_n\frac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right).$$

Déjà, que x soit positif ou négatif, on a $\frac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) \geq 0$ et puisque $\mu_n \geq 0$,

$$g_n(x) \leq \exp\left(\left(\mu_n - n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)\right).$$

Ensuite, $\mu_n - n + \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$ et donc il existe un entier naturel non nul n_0 tel que, si $n \geq n_0$, $\mu_n - n + \frac{1}{2} \leq -\frac{n}{2}$. D'autre part, il est connu que pour $u > -1$, $u - \ln(1+u) \geq 0$. Par suite, si n est un entier naturel supérieur ou égal à n_0 et x un réel strictement supérieur à $-\sqrt{n}$, on a $\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}}) \geq 0$.

Mais alors, $\left(\mu_n - n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right) \leq -\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)$ et finalement,

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \ \forall n \geq n_0,\ \forall x > -\sqrt{n},\ g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right).}$$

III-2. Une majoration de la fonction g_n :

a. La fonction u est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$. De plus, quand x tend vers 0, $u(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o(x)$. On en déduit que u se prolonge par continuité en 0 en posant $u(0) = \frac{1}{2}$ et que le prolongement ainsi obtenu est dérivable en 0 avec $u'(0) = -\frac{1}{3}$.

Pour $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, on a

$$u'(x) = -\frac{2}{x^3}(x - \ln(1+x)) + \frac{1}{x^2}(1 - \frac{1}{1+x}) = \frac{1}{x^3}\left(-2x + 2\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}\right) = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x^2+2x}{1+x} + 2\ln(1+x)\right).$$

Pour $x > -1$, posons $v(x) = -\frac{x^2+2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$. v est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour $x > -1$, on a

$$v'(x) = -\frac{(2x+2)(1+x) - (x^2+2x)}{(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} = -\frac{x^2}{(1+x)^2} \leq 0.$$

v est donc décroissante sur $]-1,+\infty[$. Puisque $v(0) = 0$, v est positive sur $]-1,0]$ et négative sur $[0,+\infty[$. Mais alors, puisque pour $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $u'(x) = \frac{v(x)}{x^3}$ et que $u'(0) = -\frac{1}{3}$, u' est négative sur $]-1,+\infty[$. u est donc décroissante sur $]-1,+\infty[$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, u est positive sur $]-1,+\infty[$.

b. Soient $n \geq n_0$ et $x \in \mathbb{R}$.
• Supposons $x \leq 0$. Si $x \leq -\sqrt{n}$, on a $g_n(x) = 0 \leq e^{-x^2/4}$ et si $-\sqrt{n} < x < 0$, par décroissance de u sur $]-1, +\infty[$, on a

$$\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2 u\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{x^2}{n}u(0) = \frac{x^2}{2n},$$

et donc

$$g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{n}{2} \times \frac{x^2}{2n}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

• Si $x > 0$, on a déjà $x > -\sqrt{n}$. De plus, comme $\dfrac{x}{\sqrt{n}} \leq x$, on a $u\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right) \geq u(x)$, puis

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{n}{2} \times \frac{x^2}{n}u\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp(-\frac{n}{2} \times \frac{x^2}{2n}u(x)) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \ln(1+x))\right).$$

L'inégalité étant vraie quand $x = 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall n \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) \leq \left\{\begin{array}{l}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4}\right) \text{ si } x \leq 0\\ \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x - \ln(1+x))\right) \text{ si } x \geq 0\end{array}\right. .}$$

QUATRIEME PARTIE

IV-1. Intégrabilité de la fonction g_n : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
• La fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
• g_n est nulle au voisinage de $-\infty$ et en particulier intégrable sur un voisinage de $-\infty$.
• D'après les théorèmes de croissances comparées

$$x^2 g_n(x) = \frac{1}{f_n(u_n)} x^2 f_n\left(\mu_n\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{x \to +\infty}{\to} 0,$$

et donc la fonction g_n est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } g_n \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

Maintenant,
- chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- la suite de fonction g_n converge simplement vers la fonction $g\ :\ x \mapsto e^{-x^2/2}$ (d'après III-1.c) qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour n grand, $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq g_n(x) \leq \varphi(x) = \left\{\begin{array}{l}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4}\right) \text{ si } x \leq 0\\ \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x - \ln(1+x))\right) \text{ si } x \geq 0\end{array}\right.$. De plus, φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $-\infty$ et puisque pour $x \geq 0$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}e^{-x/2}$, également négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$. φ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n\right)$ converge et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} g_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n = \sqrt{2\pi}.}$$

IV-2. Un encadrement de la somme S_n : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $p = E(\mu_n)$. Puisque la fonction f_n est croissante sur $[0, p]$ et décroissante sur $[p+1, +\infty[$, on a

$$\int_0^p f_n(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{p} f_n(k) \leq f_n(p) + \int_0^p f_n(x)\,dx \text{ et } \int_{p+1}^{+\infty} f_n(x)\,dx \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} f_n(k) \leq f_n(p+1) + \int_{p+1}^{+\infty} f_n(x)\,dx,$$

et en additionnant membre à membre ces deux inégalités et en tenant compte du fait que f_n est nulle sur $]-\infty, 0]$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx - \int_p^{p+1} f_n(x)\,dx \leq S_n \leq \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx - \int_p^{p+1} f_n(x)\,dx + f_n(p) + f_n(p+1)\ (*).$$

Maintenant, d'après II-1.a.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx &= f_n(\mu_n)\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}x - \sqrt{n}\right)\,dx \\ &= \frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,du = \frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{\sqrt{n}} I_n.\end{aligned}$$

$(*)$ s'écrit alors

$$\frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{\sqrt{n}} I_n - \int_p^{p+1} f_n(x)\,dx \leq S_n \leq \frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{\sqrt{n}} I_n - \int_p^{p+1} f_n(x)\,dx + f_n(p) + f_n(p+1).$$

Maintenant, $-\int_p^{p+1} f_n(x)\,dx + f_n(p) + f_n(p+1) \leq 0 + f_n(\mu_n) + f_n(\mu_n) = 2f_n(\mu_n)$ et $-\int_p^{p+1} f_n(x)\,dx \geq -\int_p^{p+1} f_n(\mu_n) = -f_n(\mu_n) \geq -2f_n(\mu_n)$. On a ainsi montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{\sqrt{n}} I_n - 2f_n(\mu_n) \leq S_n \leq \frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{\sqrt{n}} I_n + 2f_n(\mu_n),$$

ou encore

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ K_n(I_n - \epsilon_n) \leq S_n \leq K_n(I_n + \epsilon_n) \text{ où } K_n = \frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{\sqrt{n}} \text{ et } \epsilon_n = \frac{2\sqrt{n}}{\mu_n}.}$$

IV-3. Un équivalent du réel B_n : D'après II-2.b., $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(\mu_n)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$. Puisque d'autre part, $I_n \sim \sqrt{2\pi}$, la question précédente montre que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}K_n$. D'autre part, d'après I-1.c. et I-3.b.

$$B_n = \frac{1}{e}A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}K_n = \frac{K_n}{e} = \frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{e\sqrt{n}}.$$

$$\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu_n f_n(\mu_n)}{e\sqrt{n}}.}$$

