A 2001 Math PC 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PC

(**Durée de l'épreuve** : **3 heures**)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit**).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.

Cet énoncé comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

NOTATIONS

Soit V un espace vectoriel réel ; l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel V est désigné par $L(V)$. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel V ; l'endomorphisme noté f^k, où k est un entier naturel désigne l'endomorphisme unité Id_V si l'entier k est nul, l'endomorphisme obtenu en composant f k-fois avec lui-même si l'entier k est supérieur ou égal à 1 :

$$f^0 = Id_V \; ; \; f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels ; étant donné un entier naturel n, soit E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n :

$$E = \mathbf{R}[X] \; ; \; E_n = \mathbf{R}_n[X].$$

Soit D l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'. De même, soit D_n l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ qui, au polynôme Q, fait correspondre le polynôme dérivé Q'.

L'objet du problème est de rechercher des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda\, Id_E + D$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E avec lui-même ; ainsi que des réels λ pour lesquels l'endomorphisme $\lambda\, Id_{E_n} + D_n$ est égal au composé d'un endomorphisme g de l'espace vectoriel E_n avec lui-même.

Les troisième et quatrième parties peuvent être abordées indépendamment des première et deuxième parties ainsi que des préliminaires.

PRÉLIMINAIRES

Noyaux itérés :

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V.

a. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes $f^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ est une suite de sous-espaces vectoriels de V emboitée croissante :

$$\ker f^0 \subset \ker f^1 \subset \ker f^2 \subset \ldots \subset \ker f^k \subset \ker f^{k+1} \subset \ldots$$

b. Démontrer que, s'il existe un entier p tel que les noyaux des endomorphismes f^p et f^{p+1} soient égaux $\left(\ker f^p = \ker f^{p+1}\right)$, pour tout entier q supérieur ou égal à p, les noyaux des endomorphismes f^q et f^{q+1} sont égaux $\left(\ker f^q = \ker f^{q+1}\right)$; en déduire la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier } k \text{ supérieur ou égal à } p,\ \ \ker f^k = \ker f^p.$$

En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n, la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang p inférieur ou égal à la dimension n $(p \leq n)$. En particulier les noyaux $\ker f^n$, $\ker f^{n+1}$ sont égaux.

c. Démontrer que, si l'endomorphisme u d'un espace vectoriel V de dimension finie n, est tel qu'il existe un entier q supérieur ou égal à 1 $(q \geq 1)$, pour lequel l'endomorphisme u^q est nul $(u^q = 0)$, l'endomorphisme u^n est nul $(u^n = 0)$.

L'endomorphisme u est dit nilpotent.

PREMIÈRE PARTIE

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple.

I-1. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g :

Soit λ un réel donné.

a. Étant donné un entier naturel n $(n \in \mathbf{N})$, soit p un entier naturel inférieur ou égal à l'entier n $(0 \leq p \leq n)$. Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n,$$

l'endomorphisme g commute avec D_n :

$$g \circ D_n = D_n \circ g.$$

En remarquant que le sous-espace vectoriel $E_p = \mathbf{R}_p[X]$ est égal à $\ker(D_n)^{p+1}$, démontrer que E_p est stable par l'endomorphisme g de E_n ; soit g_p la restriction de l'endomorphisme g à E_p. Démontrer la relation :

$$(g_p)^2 = \lambda\, Id_{E_p} + D_p.$$

b. Démontrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$, tel que

$$g^2 = \lambda\, Id_E + D,$$

l'endomorphisme g commute avec D :

$$g \circ D = D \circ g.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, le sous-espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme g et que, si g_n est la restriction de l'endomorphisme g à $E_n,$ il vient :

$$(g_n)^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n.$$

c. Soit g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$g^2 = \lambda\, Id_E + D.$$

i/ Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E de dimension $n+1$ stable par l'endomorphisme D. Démontrer que l'endomorphisme $D_F,$ restriction de D à $F,$ est nilpotent.

En déduire que le sous-espace vectoriel F est égal à $E_n = \mathbf{R}_n[X]$. Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

ii/ Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par l'endomorphisme $g,$ il faut et il suffit qu'il soit stable par D.

I-2. **Une application immédiate** : **le cas** $\lambda < 0$:

a. À quelle condition nécessaire sur le réel λ existe-t-il un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_0 = \mathbf{R}_0[X]$ tel que

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_0} + D_0\ ?$$

b. Soit λ un réel strictement négatif ($\lambda < 0$), déduire des résultats précédents les deux propriétés :

. Il n'existe pas d'endomorphisme g de E tel que :

$$g^2 = \lambda\, Id_E + D.$$

. Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n.$$

I-3. **Une représentation matricielle simple de** D_n :

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1, λ un réel.

Matrice A_λ : soit A_λ la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par les relations suivantes : ses coefficients $a_{i\,j},\ i = 0,1,...n,\ j = 0,1,...,n,$ sont définis par les relations :

$$a_{i\,i} = \lambda, \quad a_{i\,i+1} = 1, \quad a_{i\,j} = 0 \text{ si } j \neq i \text{ ou si } j \neq i+1.$$

C'est-à-dire :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

a. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie $n+1$ tel que l'endomorphisme f^{n+1} soit nul sans que l'endomorphisme f^n le soit :

$$f^{n+1} = 0, \quad f^n \neq 0.$$

Démontrer qu'il existe un vecteur y de l'espace vectoriel V tel que la famille $B = \left(f^n(y),\ f^{n-1}(y), \ldots, y\right)$ soit libre. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base B ?

b. En déduire qu'il existe une base B_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ pour laquelle la matrice associée à l'endomorphisme D_n est la matrice A_0. Que vaut la matrice associée à l'application $\lambda\, Id_{E_n} + D_n$ dans cette base B_n ?

I-4. **Un exemple** :

Dans cette question l'entier n est égal à 2.

a. Démontrer que les seuls endomorphismes h de E_2 qui commutent avec l'endomorphisme D_2 sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en D_2 :

$$h = a\, Id_{E_2} + b\, D_2 + c\, (D_2)^2.$$

$a,\ b,\ c$ sont trois réels.

b. En déduire qu'il existe des endomorphismes g de E_2 qui vérifient la relation suivante :

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_2} + D_2.$$

Déterminer les matrices carrées G d'ordre 3 qui vérifient la relation suivante :

$$G^2 = A_1.$$

DEUXIÈME PARTIE

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

II-1. **Existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$** :

a. Montrer que, s'il existe un endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$, alors l'endomorphisme g est nilpotent et le noyau de l'endomorphisme g^2 a une dimension au moins égale à 2 ($\dim \ker g^2 \geq 2$).

b. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = D_n$.

c. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ tel que

$g^2 = D$.

II-2. Existence d'un endomorphisme g tel que $g^k = D^m$:

Soit m un entier supérieur ou égal à 1 ($m \geq 1$) et k un entier supérieur ou égal à 2 ($k \geq 2$). Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g^k = D^m.$$

a. Démontrer que les deux endomorphismes D et g sont surjectifs.

b. Démontrer que les sous-espaces vectoriels de E, $\ker g^q$ ont des dimensions finies lorsque l'entier q est inférieur ou égal à l'entier k ($0 \leq q \leq k$).

c. Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à k ($2 \leq p \leq k$). Soit Φ l'application définie dans l'espace vectoriel $\ker g^p$ par la relation :

$$\Phi : P \mapsto g(P).$$

Démontrer que cette application Φ est une application linéaire de $\ker g^p$ dans l'espace vectoriel $\ker g^{p-1}$. Quel est le noyau de l'application Φ ? Démontrer que l'application Φ est surjective ($\mathrm{Im}\,\Phi = Ker g^{p-1}$).

En déduire une relation entre les dimensions des sous-espaces vectoriels $\ker g^p$ et $\ker g^{p-1}$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\ker g^p$ en fonction de la dimension de l'espace vectoriel $\ker g$?

d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel E tel que $g^k = D^m$. Retrouver le résultat de la question II-1.c.

TROISIÈME PARTIE

L'entier strictement positif n est supposé fixé. Dans cette partie, l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ est muni de la base B_n définie à la question I-3.b. La matrice associée à l'application I_{E_n} est la matrice I_{n+1} ; la matrice associée à l'endomorphisme D_n, est désignée par le même symbole D_n.

Étant donné un réel λ supposé strictement positif ($\lambda > 0$), soit L_n l'application de $\mathbf{R}$ dans l'espace des matrices carrées réelles d'ordre $n+1$, $M_{n+1}(\mathbf{R})$ qui, au réel t associe la matrice L_n définie par la relation suivante :

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} (D_n)^k.$$

La matrice $(D_n)^k$ est le produit k-fois avec elle-même de la matrice D_n.

III-1. Dérivée de l'application $t \mapsto (L_n(t))^k$:

a. Démontrer que, pour tout t réel, la matrice $I_{n+1} + t\,D_n$ est inversible et que son inverse, noté $\left(I_{n+1}+t\,D_n\right)^{-1}$, s'écrit sous la forme suivante :

$$\left(I_{n+1}+t\,D_n\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}a_k(t)\,(D_n)^k.$$

Déterminer les fonctions $a_k : t \mapsto a_k(t)$ (bien sùr : $(D_n)^0 = I_{n+1}$).

b. Démontrer que l'application de **R** dans l'ensemble des matrices, réelles, carrées, d'ordre $n+1 : t \mapsto \left(I_{n+1}+t\,D_n\right)^{-1}$ est dérivable ; exprimer sa dérivée à l'aide des matrices $\left(I_{n+1}+t\,D_n\right)^{-1}$ et D_n.

c. Démontrer que, pour tout réel t, la matrice $L_n(t)$, élevée à la puissance $n+1$ est nulle :

$$(L_n(t))^{n+1}=0.$$

d. Calculer la fonction dérivée $t \mapsto \frac{d}{dt}L_n(t)$ de la fonction $t \mapsto L_n(t)$ au moyen des matrices D_n et $\left(I_{n+1}+t\,D_n\right)^{-1}$.

Étant donné un entier naturel k donné, déduire des résultats précédents l'expression de la fonction dérivée $t \mapsto \frac{d}{dt}(L_n(t))^k$ de la fonction $t \mapsto (L_n(t))^k$ à l'aide de l'entier k et des matrices $L_n(t)$, D_n et $\left(I_{n+1}+t\,D_n\right)^{-1}$.

III-2. **Matrice** $\varphi_u(t)$:

Étant donné un réel u, soit $\varphi_u(t)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$\varphi_u(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}(L_n(t))^k.$$

La matrice $(L_n(t))^k$ est la matrice $L_n(t)$ élevée à la puissance k.

a. Démontrer qu'étant donnés deux réels u et v le produit des matrices $\varphi_u(t)$ et $\varphi_v(t)$ est égal à la matrice $\varphi_{u+v}(t)$:

$$\varphi_u(t).\varphi_v(t)=\varphi_{u+v}(t).$$

b. Démontrer que la fonction $t \mapsto \varphi_u(t)$ est dérivable et que sa dérivée φ_u' est définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\varphi_u'(t)=u\,\left(I_{n+1}+t\,D_n\right)^{-1}.D_n.\varphi_u(t).$$

c. Dans cette question le réel u est égal à 1 ; démontrer que la dérivée seconde de la fonction φ_1 est nulle : pour tout réel t, $\quad \varphi_1''(t)=0$. En déduire la relation :

$$\varphi_1(t)=I_{n+1}+t\,D_n.$$

III-3. **Existence de l'endomorphisme** g :

a. Soit λ un réel strictement positif ($\lambda > 0$) ; en utilisant les résultats de la question précédente et en remarquant la relation suivante

$$\lambda\, I_{n+1} + D_n = \lambda\left(I_{n+1} + \frac{1}{\lambda} D_n\right),$$

démontrer qu'il existe une matrice carrée réelle d'ordre $n+1$ telle que

$$M^2 = \lambda\, I_{n+1} + D_n.$$

Exprimer cette matrice M avec une matrice $\varphi_u(t)$. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E_n tel que :

$$g^2 = \lambda\, Id_{E_n} + D_n.$$

b. Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

QUATRIÈME PARTIE

IV-1. **Un développement en série entière** :
a. Soit h la fonction définie sur la demi-droite $[-1,\infty[$ par la relation :

$$h(x) = \sqrt{1+x}\,.$$

Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont une solution est cette fonction h.

b. En déduire qu'il existe un intervalle ouvert $]-R,R[$ dans lequel la fonction h est la somme d'une série entière de terme général $b_p\, x^p,\ p = 0,1,2,\ldots$. Déterminer le rayon de convergence R et les coefficients b_p.

$$\text{pour tout réel } x \text{ appartenant à }]-R,R[,\ \ h(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p\, x^p.$$

c. Déterminer les valeurs des réels $c_n,\ n = 0,1,2,\ldots$. définis par la relation suivante :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} b_p\, b_{n-p}.$$

IV-2 Existence d'un endomorphisme g de E tel que $g^2 = \lambda\, Id_E + D$ où λ est strictement positif :
Soit λ un réel strictement positif donné ($\lambda > 0$).
a. Soit T l'application définie dans $E = \mathbf{R}[X]$ par la relation :

$$\text{pour tout } P \text{ de } E,\ T(P) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{b_p}{\lambda^p}\, D^p P.$$

Démontrer que T est un endomorphisme de E.

b. Calculer pour tout polynôme P de E son image par l'application composée $T \circ T = T^2$.

c. En déduire l'existence d'un endomorphisme g de E qui vérifie la relation suivante :

$$g^2 = \lambda \, Id_E + D.$$

d. En déduire, pour tout entier naturel n, l'existence d'un endomorphisme g_n de l'espace vectoriel $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ tel que la relation ci-dessous ait lieu :

$$(g_n)^2 = \lambda \, Id_{E_n} + D_n.$$

Exprimer l'endomorphisme g_n comme un polynôme de l'endomorphisme D_n. Retrouver les matrices obtenues à la question I-4.

FIN DU PROBLÈME