ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION

Concours d'entrée 2014-2015

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Exercice 1: ***(4,5 points)***

Soit $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \quad si\, n\epsilon\, \mathbb{N}$

1. Montrer que $(A_n)_n$est positive décroissante.
2. Montrer que $A_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} A_n$. Expliciter A_n et en déduire $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$
3. Montrer que $A_n \sim A_{n+1}$
4. A l'aide $(n+1)A_n A_{n+1}$ montrer que $A_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
5. En déduire que $\frac{1..3....(2n+1)}{2..4......(2n)} \sim 2(\sqrt{\frac{n}{\pi}})$

Exercice 2: Calcul aires, intégral ***(5 points)***

1. Calculer $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx$ et en déduire l'aire d'un disque de rayon R.
2. Calculer la limite de la suite $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k^2}{n^2})^{\frac{1}{n}}$
3. Résoudre l'EDP $\frac{\delta f}{\delta x} - \frac{\delta f}{\delta y} = x + 3y$ en utilisant le changement de variables $s = x + y \quad et \quad t = x + 2y$.

Énoncé 1: Conique ***(3,5 points)***
Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation P(x) = P(y) dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

Enoncé 2: Fraction rationnelle **(7 points)**

Soit $T_n(x) = \cos\left(n\, arccos(x)\right) \quad pour \quad x\epsilon[-1,1]$.

1. (a). Montrer que pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

   (indication : exprimer $\cos((n+2)\theta)$ et $\cos(n\theta)$ $en\, fonction\, de$ $\cos((n+1)\theta)$)

   (b). Calculer T_0 et T_1.

   (c). Montrer la relation de récurrence $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ pour tout $n \geq 0$.

   (d). En déduire que T_n est une fonction polynômiale de degré n.
2. Soit $P(X) = \lambda(X-a_1)\, ...\, (X-a_n)$ un polynôme où les a_k sont deux à deux distincts et $\lambda \neq 0$. Montrer que $\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(a_k)}}{X-a_k}$

   (attention le rapport est $\frac{1}{P'(a_k)}$ sur $(X-a_k)$).
3. Décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples. *(NB. La clarté et la lisibilité de la rédaction sont prises en compte)*