Enoncé 1: *(3,5 points)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit la fonction F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F_n(t) = \int_0^t x^n e^{-x} dx$

i) Calculer $F_0(t)$ et $I_0 = \lim_{t \to +\infty} F_0(t)$

ii) Exprimer $F_n(t)$ en fonction de $F_{n-1}(t)$

iii) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* : I_n = \lim_{t \to +\infty} F_n(t)$ existe et $I_n = nI_{n-1}$

iv) Calculer I_6

Enoncé 2: *(3,5 points)*

On considère le système d'équations linéaires à plusieurs inconnues, avec a et b des paramètres réels.

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z + a^3 t = -a^4 \\ x + by + b^2 z + b^3 t = -b^4 \\ y + 2az + 3a^2 t = -4a^3 \\ y + 2bz + 3b^2 t = -4b^3 \end{cases}$$

1) Ecrire ce système sous forme matricielle $AX = B$
2) Résoudre ce système en discutant suivant les valeurs des paramètres.
3) Donner le rang r de la matrice A et la dimension $d = q - r$ de l'espace des solutions (q est le nombre d'inconnues)
4) Déterminer l'espace des solutions de l'équation sans second membre associée $AX = 0$

Enoncé 3 : **(3 points)**

Soit $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

a) Déterminer le degré de P.
b) Montrer que P a au moins deux zéros réels entiers. En donner leur ordre de multiplicité.
c) La factorisation de $P(X)$ en éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est

$$P(X) = 7X(X+1)(X^2 + X + 1)^2$$

Décomposer $R(X) = \frac{7}{P(X)}$ en éléments simples de $\mathbb{R}[X]$