ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE Concours d'entrée 2013-2014

MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Problème: *(10 points)*

On désigne par A la matrice carrée $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, n est *un entier strictement positif*;

on note X_n , Y_n et Z_n respectivement les trois matrices colonnes de A^n ; on pose alors $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

1) On pose $A = \mathrm{I} + B$, I étant la matrice unité. $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   Calculer B^3 et montrer que l'on a $A^3 = 3A^2 - 3A$.

2) Démontrer l'existence et l'unicité des suites numériques (λ_n) et (μ_n) telles que, pour tout n *strictement positif*, soit vérifiée la relation

   $A^n = \lambda_n A^2 - \mu_n A$

   (Indication : *on peut utiliser la division euclidienne du polynôme* X^n *par* $aX^3 - bX^2 + cX$ *où* a, b *et* c *sont connus)*

   Exprimer λ_{n+1} et μ_{n+1} en fonction de λ_n et μ_n ;

   Donner le tableau des valeurs numériques des λ_n et μ_n pour $n \leq 8$.

3) Démontrer que les suites numériques (λ_n) et (μ_n) sont solutions de l'équation (E) ci-après, où l'inconnue est une suite numérique (S_n) :

   $(E) \qquad S_{n+2} - 3S_{n+1} + 3S_n = 0$

   Comparer A^7 et A et, pour n *strictement positif*, A^{n+6} et A^n ;

   Comment peut-on ramener le calcul de A^n à celui des puissances de A jusqu'à A^6 ?

4) Montrer que les suites de matrices (X_n), (Y_n) et (Z_n) vérifient l'équation (E') dans laquelle la suite inconnue (S_n) est une suite de matrices à trois lignes et une colonne :

   $(E') \qquad S_{n+2} - 3S_{n+1} + 3S_n = 0$.

5) Montrer que l'on a

   $$Y_n = X_{n+1} - X_n = \frac{1}{3} X_{n+2} \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{1}{9} X_{n+4}$$

   En déduire l'expression de A^n en fonction des éléments de X_n , X_{n+2} et X_{n+4}