Problème : (7 points)

i. Pour x, a et I, calculez

$$I_2 = \int_0^x (x-t)e^{at}\,dt$$

où a est une constante réelle non nulle. Déduisez-en une expression de e^{ax} forme

$$e^{ax} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 I_2$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont des coefficients indépendants de x.

Remarque : Une telle expression est souvent utilisée pour approcher la valeur de e^{ax} *par* $\alpha_0 + \alpha_1 x$ *au voisinage de* $x = 0$.

ii. Généralisez **le résultat du point i.** en déduisant une expression de la forme

$$e^{ax} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 I_3 \quad \text{ou} \quad I_3 = \int_0^x (x-t)^2 e^{at}\,dt$$

où $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont des coefficients indépendants de x.

iii. Généralisez **le résultat du point i.** à une fonction f quelconque (suffisamment continue et dérivable) en évaluant

$$I_2 = \int_0^x (x-t) f''(t)\,dt$$

Pour exprimer $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 I_2$$

où $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ sont des coefficients indépendants de x.