Problème : (7 points)

I. Selon la théorie des vagues en eaux peu profondes. Les particules d'eau situées à la surface de la mer et participant à la propagation des vagues de période T sont animées d'une vitesse dont les composantes horizontale et verticale sont décrites respectivement par

$$u(t) = Usin(\omega t) \qquad et \qquad v(t) = \frac{2\pi HU}{\lambda}\cos(\omega t)$$

où t désigne le temps, où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est une constante caractérisant la pulsation des vagues et où $U, H\ et\ \lambda$ sont des constantes strictement positives décrivant respectivement la vitesse horizontale maximale, la profondeur d'onde des vagues.

I.1 Déterminer le déplacement horizontal $x(t)$ des particules en fonction du temps sachant que celui-ci est donné par

$$x(t) = \int u(t)dt$$

I.2 Déterminer la hauteur des vagues $z(t)$ en fonction du temps sachant que celle-ci vérifie

$$z'(t) = v(t) \quad et \quad \int_0^T z(t)dt = 0 \qquad où \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

I.3. Calculer l'énergie cinétique moyenne (la moyenne v de la vitesse est négligée)

$$\bar{E}_{cin} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho u^2(t)dt \qquad où \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

et où ρ désigne la masse par unité de volume de l'eau.

II. On considère maintenant le cas où

$$u(t) = U_1 sin(\omega t) + U_2 sin(4\omega t) \qquad où\ T = \frac{2\pi}{}$$

(où $U_1\ et\ U_2$ sont des constantes). Ceci traduit la présence simultanée de vagues de périodes $T\ et\ T/4$.

Montrer que l'énergie cinétique moyenne correspondante est égale à la somme des énergies cinétiques moyennes associées aux deux composantes $U_1 sin(\omega t)\ et\ U_2 sin(4\omega t)$ considérées séparément.