ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION

Concours d'entrée 2010-2011

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Enoncé 1: (6 points)

a) Déterminer un Polynôme P du 3e degré, unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient de X^3 est 1) tel que :

$$P(0)=0 \quad et \quad P(1)=1 \quad et \quad P(2)=2$$

b) α étant un nombre réel, étudier la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0=\alpha \\ \forall n\in IN, \quad U_{n+1}=P(U_n) \end{cases}$$

Enoncé 2: *(4 points)*

Soit (U_n) une suite, à termes strictement positifs, de limite 0 ; on suppose que la série $\sum U_n$ diverge. Soient :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} U_k, \qquad w_n=\frac{U_n}{S_n} \quad \text{et} \quad t_n=\frac{U_{n+1}}{S_n}$$

i) Exprimer $1-w_n$ en fonction de S_n et S_{n-1}

ii) Quelle est la nature de la série $\sum w_n$? (On utilisera la série de terme général $\ln\frac{S_{n-1}}{S_n}$)

iii) Quelle est la nature de la série $\sum t_n$?

Enoncé 3 : *(6 points)*.

Soit x un réel strictement positif et différent de 1. Soit $A(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}$

1) Montrer l'existence de $A(x)$ et calculer sa valeur.

2) Soit $B(x)=\int_x^{x^2}\cos\frac{2\pi\ln|\ln t|}{\ln 2}\cdot\frac{dt}{t\ln t}$.

   Montrer l'existence de $B(x)$ et calculer sa valeur.

3) Soit w la fonction définie sur IR par $w(x)=|x-E(x)-0{,}5|$

   où $E(x)$ désigne la partie entière de x. On définit $C(x)=\int_x^{x^2}w\left(\frac{\ln|\ln t|}{\ln 2}\right)\frac{dt}{t\ln t}$

   Montrer l'existence de $C(x)$ et calculer sa valeur.

Enoncé 4 : (4 points)

Pour tous entiers p et n, on pose : $u_p=\frac{(-1)^p}{(p+1)(p+2)}$ et $S_n=u_0+\ldots+u_n$.

a) Calculer $\int_0^1 t^p(1-t)\,dt$.

b) Montrer que, pour tout entier n : $S_n=\int_0^1\frac{(1-t)\left[1-(-t)^{n+1}\right]}{1+t}\,dt$

c) On pose $I=\int_0^1\frac{1-t}{1+t}\,dt$.

   Montrer que la suite (S_n) converge vers I. Donner la valeur de I.