

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <http://www.ibo.org/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse <http://www.ibo.org/fr/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <http://www.ibo.org/es/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

**Matemáticas**  
**Nivel superior**  
**Prueba 3 – Conjuntos, relaciones y grupos**

Miércoles 15 de mayo de 2019 (mañana)

1 hora

---

**Instrucciones para los alumnos**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 9]

La relación  $R$  se define sobre  $\mathbb{N}$  mediante  $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{2}$ .

- (a) Muestre que  $R$  es una relación de equivalencia. [7]
- (b) Determine las clases de equivalencia. [2]

2. [Puntuación máxima: 14]

Las operaciones binarias  $\circ$  y  $*$  se definen sobre el conjunto de los números complejos, tal que  $z_1 \circ z_2 = A(z_1 + z_2)$  y  $z_1 * z_2 = Bz_1z_2$  donde  $A$  y  $B$  son constantes reales no nulas.

- (a) Determine el elemento neutro con respecto a  $*$ . [2]
- (b) Muestre que todo elemento del conjunto de los números complejos, exceptuando  $z = 0$ , tiene un simétrico con respecto a  $*$ . [3]
- (c) Halle el valor de  $A$  para el cual la operación  $\circ$  es asociativa. [4]
- (d) Muestre que  $*$  es distributiva respecto a  $\circ$  para todos los valores de  $A$  y de  $B$ . [5]

3. [Puntuación máxima: 9]

Un grupo no abeliano  $\{G, \circ\}$  consta de ocho elementos  $e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$ , donde  $e$  es el elemento neutro. La operación binaria es  $\circ$  y, por ejemplo,  $a \circ b$  se representa como  $ab$ . El elemento  $a$  es de orden 4, el elemento  $b$  es de orden 2 y  $ba = a^3b$ .

(a) Demuestre que

(i)  $ba^2 = a^2b$ ;

(ii)  $ba^3 = ab$ .

[4]

(b) El grupo  $\{G, \circ\}$  tiene la siguiente tabla de Cayley. Halle los elementos  $P, Q, R, S, T, U, V, W$  de este grupo.

$\circ$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
$e$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3$	$b$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$
$a$	$a$	$a^2$	$a^3$	$e$	$ab$	$a^2b$	$a^3b$	$b$
$a^2$	$a^2$	$a^3$	$e$	$a$	$a^2b$	$a^3b$	$b$	$ab$
$a^3$	$a^3$	$e$	$a$	$a^2$	$a^3b$	$b$	$ab$	$a^2b$
$b$	$b$	$a^3b$	$a^2b$	$ab$	$e$	$a^3$	$a^2$	$a$
$ab$	$ab$	$b$	$a^3b$	$a^2b$	$a$	$e$	$R$	$U$
$a^2b$	$a^2b$	$ab$	$b$	$P$	$a^2$	$a$	$S$	$V$
$a^3b$	$a^3b$	$a^2b$	$ab$	$Q$	$a^3$	$a^2$	$T$	$W$

[4]

(c) Indique por qué  $\{G, \circ\}$  no es isomorfo al grupo  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, +_8\}$ , donde  $+_8$  representa la suma módulo 8.

[1]

4. [Puntuación máxima: 7]

Sea  $S$  el conjunto de números reales de la forma  $a + b\sqrt{5}$ , donde  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $a^2$  no puede ser igual a  $5b^2$ , y  $a, b$  no son simultáneamente iguales a cero. Muestre que  $S$  es un grupo con respecto a la operación de la multiplicación. Puede suponer que se cumple la propiedad asociativa.

[7]

5. [Puntuación máxima: 11]

Considere la función  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  que se define mediante  $f(x, y) = (x + y, x - y)$ .

(a) Demuestre que la función  $f$  es biyectiva.

[9]

Considere la función  $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  que se define mediante  $g(x, y) = (x + y, x - y)$ .

(b) Explique por qué la función  $g$  no es una función biyectiva.

[2]