CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

Avril 2011

Exercice

1. D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k = xB(x)$$

avec

$$B(x) = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^{k-1} = C_{2n}^1 + \sum_{k=2}^{2n-1} C_{2n}^k x^{k-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n-1}\,.$$

Donc, le polynôme B est de degré $2n-1$, son coefficient dominant est $C_{2n}^{2n} = 1$ et son terme constant b_0 vaut $C_{2n}^1 = 2n$.

2. z est racine de A si et seulement si $(z+1)^{2n} = 1$ ce qui équivaut à $z+1 = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{2n}\right)$ où k est un entier compris entre 0 et $2n-1$. Donc les racines de A sont $z_0 = 0$ et $z_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{2n}\right) - 1$ avec k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

3. (a) Faisons dans P_n le changement d'indice $\ell = 2n - k$. Alors :

$$P_n = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-\ell)\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{\ell\pi}{2n}\right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{\ell\pi}{2n}\right)$$

car $\sin(\pi - x) = \sin x$.
On en déduit que

$$Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2.$$

De plus, pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$, $\dfrac{k\pi}{2n}$ appartient à $[0,\pi]$ donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right) \geq 0$ ce qui implique que P_n et Q_n sont positifs. Par conséquent, $P_n = \sqrt{Q_n}$.

(b) On a $B(x) = \prod_{k=1}^{k=2n-1} (x - z_k)$ donc $B(0) = (-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = b_0$, soit

$$\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = -b_0 = -2n\,.$$

D'autre part, pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$:

$$z_k = \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left(\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)\right) = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\,,$$

donc,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k &= \prod_{k=1}^{k=2n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}\\ &= 2^{2n-1}i^{2n-1}\exp\left(\frac{i\pi}{2n}\sum_{k=1}^{k=2n-1} k\right)\prod_{k=1}^{k=2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\,,\end{aligned}$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = 2^{2n-1}\frac{(-1)^n}{i}\exp\left(\frac{2n-1}{2}i\pi\right)Q_n;$$

or $\exp\left(\frac{2n-1}{2}i\pi\right) = e^{in\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^n}{i}$ d'où

$$Q_n = 2n \times 2^{1-2n} = \frac{n}{4^{n-1}} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Problème

I. Continuité et dérivation sous le signe $\int$.

1. Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $[a,b]$ donc intégrable sur $[a,b]$. La fonction g est ainsi bien définie.

   Soient $x_0 \in I$ et $r > 0$, tel que $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$, ce qui est possible puisque I est ouvert. Le pavé $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a,b]$ est une partie compact de $\mathbb{R}^2$ (il est fermé et borné). La fonction f est donc uniformément continue sur $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, x' \in [x_0 - r, x_0 + r]$ et pour tout $t, t' \in [a,b]$, on a

   $$(|t - t'| \leq \eta \quad \text{et} \quad |x - x'| \leq \eta) \implies \Big|f(x,t) - f(x',t')\Big| \leq \varepsilon\,.$$

   Soit x et x' appartenant à $[x_0 - r, x_0 + r]$. Nous avons

   $$\big|g(x) - g(x')\big| = \Big|\int_a^b \big(f(x,t) - f(x',t)\big)dt\Big| \leq \int_a^b \big|f(x,t) - f(x',t)\big|dt\,.$$

   Appliquons l'uniforme continuité de f sur $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a,b]$ en choisissant $t = t'$. Si $|x - x'| \leq \eta$, alors on a $\big|f(x,t) - f(x',t)\big| \leq \varepsilon$ quel que soit $t \in [a,b]$, d'où

$\int_a^b \left|f(x,t) - f(x',t)\right|dt \leq \varepsilon(b-a)$. Ainsi on a $\left|g(x) - g(x')\right| \leq \varepsilon(b-a)$ dès que x et x' appartiennent à $[x_0 - r, x_0 + r]$. Cela montre que g est uniformément continue sur $[x_0 - r, x_0 + r]$, en particulier g est continue au point x_0.
Le point x_0 étant pris arbitrairement dans I, cela entraine que g est continue sur I.

2. (a) La fonction φ est dérivable sur I, car elle est somme de fonctions dérivables et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,.$$

Soient $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Soit $r > 0$, tel que $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$, ce qui est possible puisque I est ouvert. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément continue sur le compact $K = [x_0 - r, x_0 + r] \times [a,b]$, il existe donc $\varrho > 0$ tel que pour tout $(t,x), (t',x') \in K$, on ait :

$$(|t-t'| \leq \varrho \quad \text{et} \quad |x-x'| \leq \varrho) \implies \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x',t')\right| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui, en prenant $\eta = \min(\varrho, r)$, donne

$$\forall t \in [a,b]\,,\quad \forall x \in I\,; \quad |x - x_0| \leq \eta \implies \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varepsilon\,.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$, par la question précédente, il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in I\,,\quad |x - x_0| \leq \eta \implies \forall t \in [a,b]\,,\quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varepsilon\,. \tag{1}$$

Soit $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et $t \in [a,b]$, par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]\min(x_0,x), \max(x_0,x)[$ tel que $\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t) = (x - x_0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi,t)$. Comme $\varphi(x_0,t) = 0$ et $\xi \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, par (1), $|\varphi(x,t)| \leq |x - x_0|\varepsilon$. Ce qui donne,

$$x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \implies |\varphi(x,t)| \leq |x - x_0|\varepsilon\,,\quad \forall t \in [a,b].$$

(c) Soit $x_0 \in I$ fixé. En intégrant la fonction φ entre a et b on a pour tout $x \in I$,

$$\left|g(x) - g(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| = \left|\int_a^b \varphi(x,t)dt\right|.$$

D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in I\,,\ |x - x_0| \leq \eta \implies \left|g(x) - g(x_0) - (x - x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\right| \leq \varepsilon|x - x_0||b - a|\,.$$

La fonction g est ainsi dérivable en x_0 avec pour dérivée :

$$g'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt\,.$$

Enfin, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant continue, le théorème de continuité sous le signe $\int$ démontré dans **I**. 1., nous donne la continuité de g'.

3. C'est une simple récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. En effet, la démonstration à l'ordre $k=1$, est traitée dans la partie **I**.2. Supposons que la relation est vraie jusqu'à l'ordre $k \geq 1$ et supposons que f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $I \times [a,b]$. Alors, par l'hypothèse de récurrence g est de classe $\mathcal{C}^k$ et
$$g^{(k)} = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt\,.$$
Comme f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $I \times [a,b]$, la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est de $\mathcal{C}^1$ sur $I \times [a,b]$. On applique le résultat de la récurrence pour $k=1$ à la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ et on obtient immédiatement le résultat à l'ordre $k+1$.

II.

1. Soit $x > 0$, comme l'intégrale $Sf(x)$ converge, la somme partielle $\sum_{n=0}^N u_n(x) = \int_0^{N+1} \frac{tf(t)}{x^2+t^2}dt$ converge vers $Sf(x)$ quand N tend vers $+\infty$. Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et a pour somme Sf.

2. On utilise le résultat de la première partie : l'application $(x,t) \mapsto \frac{tf(t)}{x^2+t^2}$ de $\mathbb{R}_+^* \times [n,n+1]$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction u_n est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n^{(k)}(x) = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)dt.$

3. On a $x^2+t^2 = (x-it)(x+it)$. Par les méthodes classiques on décompose la fraction rationnelle $\frac{t}{x^2+t^2}$ en éléments simples, on trouve $\alpha = -\frac{i}{2}$ et $\beta = \bar{\alpha} = \frac{i}{2}$:
$$\frac{t}{x^2+t^2} = -\frac{i}{2}\frac{1}{x-it} + \frac{i}{2}\frac{1}{x+it}\,. \tag{2}$$
Or, pour tout $k \in N^*$,
$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{1}{x-it}\Big) = \frac{(-1)^k k!}{(x-it)^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{1}{x+it}\Big) = \frac{(-1)^k k!}{(x+it)^{k+1}}\,.$$
d'où
$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big) = (-1)^{k+1} i\frac{k!}{2}\Big[\frac{1}{(x-it)^{k+1}} - \frac{1}{(x+it)^{k+1}}\Big]\,.$$
Pour tout couple de réels $(x,t) \neq (0,0)$, on a $|x-it| = |x+it| = (x^2+t^2)^{\frac{1}{2}}$ et
$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\Big| &\leq \frac{k!}{2}\Big[\frac{1}{|x-it|^{k+1}} + \frac{1}{|x+it|^{k+1}}\Big] \\ &= \frac{k!}{\big(x^2+t^2\big)^{\frac{k+1}{2}}}\,.\end{aligned}$$

4. Rappelons que d'après la question II, b, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}^*\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*\,, \quad u_n^{(k)}(x) = \int_n^{n+1} f(t)\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)dt.$$

La fonction f étant bornée sur $\mathbb{R}_+$, la quantité $M = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| \in \mathbb{R}_+$ est finie. Posons $A_k = Mk!$. On a pour tout $x \in [a,+\infty[$

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}\,.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$ est convergente (car $k+1 \geq 2$ et $\frac{1}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}} \sim \frac{1}{t^{k+1}}$), la série de terme général $A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$ est convergente, ce qui prouve la convergence normale sur $[a,+\infty[$ de la série $\sum u_n^{(k)}$.

5. On démontre par récurrence la propriété suivante, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, Sf appartient à $\mathcal{C}^k$ et

$$\big(Sf\big)^{(k)}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big) f(t)dt\,.$$

Démontrons la propriété pour $k=1$, la preuve du passage de k à $k+1$ est identique à celle pour $k=1$. Soit $a>0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ est convergente sur $[a,+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, de plus la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n'$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme la fonction $Sf = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dérivable sur $[a,+\infty[$ et pour tout $x\in[a,+\infty[$,

$$(Sf)'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big) f(t)dt\,.$$

Enfin, comme $a>0$ est arbitraire, Sf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.

1. Posons $u(t) = \frac{t}{x^2+t^2}$ et $v(t) = -\cos(t)$. Par intégration par parties, on obtient, pour tout $T>0$,

$$\int_0^T \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt = -\frac{T\cos(T)}{x^2+T^2} + \int_0^T \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt\,.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt$ est absolument convergente puisque

$$\Big|\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)\Big| \leq \frac{|x^2-t^2|}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{1}{x^2+t^2}\,.$$

Par ailleurs $\left|\frac{T\cos(T)}{x^2+T^2}\right| \leq \frac{T}{x^2+T^2} \to 0$ quand $T\to+\infty$. Il en résulte que $\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt$ est convergente et $g\in\mathcal{E}$. De plus

$$Sg(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt\,. \qquad (3)$$

2. (a) En utilisant la décomposition (2), on vérifie que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big) = -\frac{i}{(x-it)^3} + \frac{i}{(x+it)^3} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)$$

(b) D'après la question précédente et II. 5, on a

$$(Sg)''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\sin(t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\sin(t)dt\,.$$

On intégre une première fois par parties, on a

$$\begin{aligned}(Sg)''(x) &= -\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\sin(t)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\cos(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\cos(t)dt\,,\end{aligned}$$

car $\Big|\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{x^2+t^2}\Big)\sin(t)\Big| \leq \Big|\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\Big| \to 0$ quand t tend vers $+\infty$. Par une deuxième intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned}(Sg)''(x) &= \Big[\frac{t}{x^2+t^2}\cos(t)\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\sin(t)dt \\ &= (Sg)(x)\,,\end{aligned}$$

car $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\cos(t) = 0$.

(c) L'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des fonctions y de la forme $y : x \to ae^x + be^{-x}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3. (a) D'après (3),

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\sin(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2}\cos(t)dt\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2}\sin(t)dt\Big| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{|x^2-t^2|}{(x^2+t^2)^2}dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2}dt\,.\end{aligned}$$

Puis par le changement de variable $u = x/t$ on obtient,

$$(Sg)(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2}dt = \frac{1}{x}\Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}\,.$$

Il en résulte que $\lim_{x\to+\infty} (Sg)(x) = 0$.

(b) La fonction $\frac{\sin(t)}{t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est prolongeable par continuité au point zéro, elle est donc intégrable au voisinage de zéro et sur tout intervalle de type $[0, M]$, en particulier sur $[0, \pi/2]$. Montrons la convergence de l'intégrale sur $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$. Par une intégration par parties, pour tout $M > \pi/2$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\sin(t)}{t}dt = -\frac{\cos(M)}{M} - \int_{\frac{\pi}{2}}^M \frac{\cos(t)}{t^2}dt\,.$$

L'absolue convergence de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{\cos(M)}{M} = 0$ implique la convergence de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et par suite celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{x^2+t^2}dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt &= -x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x^2+t^2)}dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda\end{aligned}$$

par le changement de variables $t = x\lambda$.
Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$. Donc pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda\Big| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{x\lambda}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda \\ &= x\int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2+1} \\ &= \frac{\pi}{2}x\,.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}d\lambda$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et $Sg(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ quand x tend vers 0.

(c) D'après les questions (b) et (c) de **III**. 2., il existe deux constantes a et b telles que $Sg(x) = ae^x + be^{-x}$, pour tout $x > 0$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Sg(x) = 0$, la constante a est nulle, $a = 0$ et puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Sg(x) = \frac{\pi}{2}$, on a $b = \frac{\pi}{2}$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,, \quad Sg(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}\,.$$

AVRIL 2011

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit E le sous espace vectoriel de R^3 déterminé par :

$$E = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$$

1. Déterminer une base de E. On notera X la matrice dont les colonnes sont constituées d'une base de E.

On a : $(x, y, z) = (x, y, -x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$, d'où $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Calculer la matrice $M = I - XX'$, où I désigne la matrice unité et X' la matrice transposée de X.

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer les valeurs propres de M.
$\det(M - \lambda I) = \lambda(1-\lambda)(2+\lambda)$. Les valeurs propres sont donc : -2, 0 et 1.

4. Déterminer les sous espaces vectoriels propres de M. Que peut-on constater ?

Le sous espace propre associé à la valeur propre -2 est engendré par le vecteur : (1, 1, -2),

Le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est engendré par le vecteur : (1, -1, 0),

Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par le vecteur : (1, 1, 1).

On obtient ainsi une base orthonormée, ce qui est toujours vérifié pour une matrice symétrique. On pourrait même choisir une base orthogonale.

Exercice n° 2

Etudier la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 4$ et $u_0 = 1$.

On vérifie aisément que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$, d'où $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n}(u_1 - u_0) < 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

Si la suite (u_n) converge vers une limite *l*, celle ci doit vérifier l'équation : $l = \frac{1}{2}l - 4$, soit $l = -8$.

On montre facilement par récurrence que $u_n > -8$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée, elle converge vers -8.

<u>Remarque</u> : On peut aussi chercher le réel *k* tel que la suite $v_n = u_n + k$ est une suite géométrique $v_{n+1} = a.v_n$

On trouve *k* = 8, *a* = ½ et donc $v_n \to 0$ et donc $u_n \to -8$.

Exercice n° 3

Pour *t* nombre réel strictement positif, on définit la fonction f_t de la variable réelle *x* dépendant du paramètre *t* de la façon suivante :

$$f_t(x) = \frac{1+t}{t+x^2}$$

1. Déterminer, quand ils existent, les réels $M(x)$ et $m(x)$ définis par :

$$M(x) = \underset{t>0}{Max}\ f_t(x)$$
$$m(x) = \underset{t>0}{Min}\ f_t(x)$$

La dérivée de f_t par rapport à la variable *t* est égale à : $f_t'(x) = \frac{x^2 - 1}{(t+x^2)^2}$

Pour $|x| \geq 1$, f_t est croissante, pour t>0, de $\frac{1}{x^2}$ à 1.

Pour $|x| < 1$, f_t est décroissante, pour t>0, de $\frac{1}{x^2}$ à 1.

On obtient donc :

$$m(x) = \underset{t>0}{Min}\ f_t(x) = \begin{cases} 1/x^2 & si\ |x| \geq 1 \\ 1 & si\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$M(x) = \underset{t>0}{Max}\ f_t(x) = \begin{cases} 1/x^2 & si\ |x| \leq 1 \\ 1 & si\ |x| > 1 \end{cases}$$

2. Représenter les graphes des fonctions M et m.

Les graphes sont simples à tracer et ils sont « complémentaires », puisque $m(x) = Min(1, 1/x^2)$ et $M(x) = Max(1, 1/x^2)$.

3. Etudier les variations de f_t (t>0) en fonction de la variable x et tracer son graphe.

La dérivée de f_t par rapport à la variable x est égale à : $f_t^{'}(x) = \dfrac{-2x(1+t)}{(t+x^2)^2}$ et c'est une fonction paire. Cette fonction est décroissante sur R^+ de $1+1/t$ à 0. Elle admet une tangente horizontale en $(0, 1+1/t)$. Sa dérivée seconde s'annule pour $x = \pm\sqrt{t/3}$ et la valeur de f_t en ces points est 3(1 + t)/4t. La fonction est concave sur l'intervalle $\left[-\sqrt{t/3}, +\sqrt{t/3}\right]$ et convexe sinon.

Exercice n° 4

1. Pour tout entier n strictement positif, la suite (α_n) est définie par la récurrence d'ordre 2 :

$$\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} + \alpha_n),\ \alpha_1 = 1,\ \text{et}\ \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Exprimer α_n en fonction de n et calculer sa limite.

L'équation associée à la relation de récurrence s'écrit :

$2x^2 - x - 1 = 0$ et les solutions sont : $x = 1$ ou $x = -1/2$.

Le terme général de la suite (α_n) est de la forme : $\alpha_n = \lambda(1)^n + \mu(-1/2)^n$ avec $\alpha_1 = 1 = \lambda + \mu(-1/2)$ et $\alpha_2 = 1/2 = \lambda + \mu(1/4)$. La résolution du système donne : $\lambda = 2/3$ et $\mu = (-2/3)$. On obtient :

$$\alpha_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

Et $\underset{n}{Lim}\,\alpha_n = 2/3$.

2. Pour tout entier *n*, on définit la suite réelle (x_n), récurrente d'ordre 2, de la façon suivante :

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \times x_n}$$

On donne $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

Donner l'expression du terme général x_n de la suite.

On vérifie aisément que cette suite (x_n) est bien définie, car toujours strictement positive.

On peut calculer quelques premiers termes, par exemple : $x_2 = 2^{1/2}$ $x_3 = 2^{3/4}$, $x_4 = 2^{7/8}$.

On montre alors par récurrence que $x_n = 2^{\alpha_n}$. En effet : $x_{n+2} = \sqrt{2^{\alpha_{n+1}} \times 2^{\alpha_n}} = (2^{\alpha_{(n+1}+\alpha_n})^{1/2}$ et x_{n+2} est de la forme $2^{\alpha_{n+2}}$ si et seulement si on a la relation : $\alpha_{n+2} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} + \alpha_n)$ avec $\alpha_1 = 1$, et $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. On se trouve dans la situation de la question précédente, donc

$$x_n = 2^{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$$

3. Déterminer la limite de x_n quand $n \to +\infty$.

$$\underset{n}{Lim}\, x_n = 2^{2/3}$$

<u>Remarque</u> : Puisque la suite de terme général x_n est strictement positive, on peut passer au logarithme de base 2. On a alors $\alpha_n = \log_2 x_n$ (le log base 2 est obligatoire pour retrouver les valeurs de α_1 et α_2 de la question 1.

Exercice n° 5

On considère n couples fixés (x_i, y_i) de valeurs réelles strictement positives et λ un paramètre réel non nul également fixé.

On cherche à déterminer une fonction f qui minimise l'expression suivante :

$$L(f,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int_0^1 f''(x)\, dx$$

dans chacun des cas ci dessous :

1. $f(x) = ax$
2. $f(x) = ax^2$
3. $f(x) = ax^2 + bx$

1. Pour $f(x)=ax$, on a : $L(f,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i))^2$. Cette fonction admet un minimum pour la valeur de a qui annule la dérivée de cette fonction L par rapport à a.

On obtient : $2a(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-2\sum_{i=1}^{n}x_i\ y_i=0$, d'où $a=\dfrac{\sum_i x_i\ y_i}{\sum_i x_i^2}$

2. Pour $f(x)=ax^2$, $L(f,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i^2)^2+2a\lambda$. En dérivant par rapport à a , on obtient : $2a(\sum_{i=1}^{n}x_i^4)-2\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ y_i+2\lambda=0$, d'où $a=\dfrac{\sum_i x_i^2\ y_i-\lambda}{\sum_i x_i^4}$

3. Pour $f(x)=ax^2+bx$, $L(f,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i^2-bx_i)^2+2a\lambda$. On dérive par rapport à a et par rapport à b.

$L_a^{'}=2a(\sum_{i=1}^{n}x_i^4)+2b(\sum_i x_i^3)-2\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ y_i+2\lambda=0$ et

$L_b^{'}=2a(\sum_{i=1}^{n}x_i^3)+2b(\sum_i x_i^2)=\sum_i x_i\ y_i$

On a donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a(\sum_i x_i^4)+b(\sum_i x_i^3)=\sum_i x_i^2\ y_i-\lambda \\ a(\sum_i x_i^3)+b(\sum_i x_i^2)=0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne, en posant $\Delta=(\sum_i x_i^4)(\sum_i x_i^2)-(\sum_i x_i^3)^2$:

$$a=\frac{(\sum_i x_i^2)(\sum_i x_i^2\ y_i-\lambda)-(\sum_i x_i^3)(\sum_i x_i\ y_i)}{\Delta} \text{ et}$$

$$b=\frac{(\sum_i x_i^4)(\sum_i x_i\ y_i)-(\sum_i x_i^3)(\sum_i x_i^2\ y_i-\lambda)}{\Delta}$$

Exercice n° 6

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est égale à x. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on souhaite étudier sa fiabilité. On dispose des expériences suivantes :

- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme malades s'est avéré positif dans 98% des cas.

- Le test de dépistage effectué sur 100 personnes considérées comme saines s'est avéré positif pour une seule personne.

On choisit au hasard une personne de la population et on la soumet au test.

On note M= « la personne est malade » et T= « la personne a un test est positif ».

Enfin, on note $p(x)$ la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

1. Exprimer $p(x)$ en fonction de x.

On a : $p(x) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)}$ ou encore $p(x) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})}$

D'où $p(x) = \dfrac{P_M(T)x}{P_M(T)x + P_{\overline{M}}(T)(1-x)}$, car $P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M)$ où $P_M(T)$ est la probabilité conditionnelle de T sachant M.

Dans l'application numérique : $P(M) = x$ et $P(\overline{M}) = 1 - x$, $P_M(T) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}01$

On obtient :

$$p(x) = \frac{0{,}98x}{0{,}97x + 0{,}01} = \frac{98x}{97x + 1}$$

2. Tracer le graphe de la fonction p sur l'intervalle $[0,1]$

Le graphe de la fonction p est une fonction hyperbolique croissante restreinte à l'intervalle $[0,1]$.

3. On considère que le test est fiable quand la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 95%.

Le test est-il fiable si la proportion x d'individus malades est de 5% ?

$$p(0{,}05) = \frac{98 \times 0{,}05}{97 \times 0{,}05 + 1} \approx 0{,}8376 .$$

Le test n'est pas fiable si 5% de la population est malade.

A partir de quelle proportion *x*, le test est-il fiable ?

On doit résoudre l'équation : $p(x) \geq 0{,}95$. Soit $\frac{98x}{97x+1} \geq 0{,}95$ et on obtient $x \geq \frac{19}{117} \approx 0{,}1624$.

Le test est donc fiable si au moins 17% de la population est malade.