**AVRIL 2008**

**CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES**

**ITS Voie B Option Mathématiques**

**Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques**

# Partie I : Les polynômes de Legendre

1. (a) $(t^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n$ de coefficient dominant 1 et $L_n$ est sa dérivée $n^{\text{ième}}$ donc,
$\boxed{L_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ de coefficient dominant } 2n(2n-1)\cdots(2n-n+1) = \frac{(2n)!}{n!}}$.

   (b)
$$\begin{aligned}
L_0(t) &= \big((t^2-1)^0\big)^{(0)} = 1\\
L_1(t) &= \big((t^2-1)^1\big)^{(1)} = (t^2-1)' = 2t\\
L_2(t) &= \big((t^2-1)^2\big)^{(2)} = (t^4-2t^2+1)'' = 12t^2-4\\
L_3(t) &= \big((t^2-1)^3\big)^{(3)} = (t^6-3t^4+3t^2-1)^{(3)} = 6\times5\times4t^3 - 3\times4\times3\times2t = 120t^3-72t\ .
\end{aligned}$$

   (c) Pour tout $n$, $(t^2-1)^n$ est un polynôme pair donc, pour $k$ pair ($k \le 2n$), $\frac{d^k}{dx^k}(t^2-1)^n$ est un polynôme pair, et pour $k$ impair, $\frac{d^k}{dx^k}(t^2-1)^n$ est un polynôme impair. En particulier, $\boxed{L_n \text{ a la même parité que } n.}$

   (d) Démonstration par récurrence. On a $L_0(1) = 1 = 2^0 \times 0!$, l'assertion est vraie pour $n = 0$. Supposons que $L_{n-1}(1) = 2^{n-1}(n-1)!$. En appliquant la formule de Leibniz et en remarquant que seules les dérivées premières et secondes de $(t^2-1)$ ne sont pas nulles :

$$\begin{aligned}
\big((t^2-1)(t^2-1)^{n-1}\big)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (t^2-1)^{(k)}\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-k)}\\
&= (t^2-1)\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n)} + C_n^1(t^2-1)'\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-1)}\\
&\quad + C_n^2(t^2-1)''\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-2)}\\
&= (t^2-1)\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n)} + C_n^1 2t\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-1)}\\
&\quad + C_n^2 2\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-2)}\ .
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la caractérisation des racines multiples à l'aide des dérivées successives, 1 est racine simple de $\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-2)}$ car 1 est racine de multiplicité

$n-1$ de $(t^2-1)^{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}\big((t^2-1)(t^2-1)^{n-1}\big)^{(n)}(1) &= (t^2-1)\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n)}(1) + C_n^1 2\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-1)}(1)\\ &\quad + C_n^2 2\big((t^2-1)^{n-1}\big)^{(n-2)}(1)\\ &= n \times 2 \times 2^{n-1}(n-1)! + C_n^2 2 \times 0\\ &= 2^n \times n!\,.\end{aligned}$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(1) = 2^n \times n!}\,.$$

D'après la parité de $L_n$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(-1) = (-2)^n \times n!}\,.$$

2. Par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}\big\langle L_n, L_m\big\rangle &= \int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\Big)\Big(\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\Big)dt\\ &= \Big[\Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\Big)\Big(\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\Big)\Big]_{-1}^{1}\\ &\quad - \int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\Big)\Big(\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(t^2-1)^m\Big)dt\,.\end{aligned} \tag{1}$$

En remarquant que pour $1 \le k \le n$, $1$ et $-1$ sont racines multiples d'ordre $k$ de $\big((t^2-1)^n\big)^{(n-k)}$, ce qui fait que le "crochet" dans l'intégration par parties est nul et en réitérant $n$ fois cette intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\big\langle L_n, L_m\big\rangle &= -\int_{-1}^{1} \Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2-1)^n\Big)\Big(\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(t^2-1)^m\Big)dt\\ &\ \ \vdots\\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n\Big(\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^m\Big)dt\,.\end{aligned} \tag{2}$$

3. Puisque par définition pour tout entier $n$, $\|K_n\| = 1$, il suffit de montrer que la famille $\big\{L_n \;:\; n \in \mathbb{N}\big\}$ est orthogonale. Soit $n$ et $m$ deux entiers naturels distincts, supposons que $n > m$, alors $\Big(\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2-1)^m\Big) = 0$, car c'est la dérivée $(n+m)^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré $2m$, avec $n+m > 2m$. On en déduit que $\big\langle L_n, L_m\big\rangle = 0$ pour tout entiers $n \neq m$. Ce qui prouve que la famille est orthogonale

4. (a) Considérons l'espace $\mathrm{Vect}(f, F_n)$. Puisque $\pi_n(f)$ est la projection orthogonale de $f$ sur $F_n$, on a

$$\forall j \in \{0, \cdots, n\}, \qquad \big\langle f - \pi_n(f), K_j\big\rangle = 0,$$

ce qui donne

$$\forall j \in \{0, \cdots, n\}, \qquad \big\langle f, K_j\big\rangle = \big\langle \pi_n(f), K_j\big\rangle\,.$$

Dans l'espace vectoriel euclidien $F_n$ de base orthonormée $(K_j)_{j\in\{0,\cdots,n\}}$, on a la décomposition

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \big\langle \pi_n(f), K_j \big\rangle K_j = \sum_{j=0}^{n} \big\langle f, K_j \big\rangle K_j \ .$$

Toujours parce que $(K_j)_{j\in\{0,\cdots,n\}}$ est orthonormée

$$\|\pi_n(f)\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \big\langle f, K_j \big\rangle^2 \ .$$

(b) D'après le théorème de Pythagore,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\pi_n(f)\|^2 + \|f - \pi_n(f)\|^2 = \|f\|^2 \ ,$$

ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^{n} \big\langle f, K_j \big\rangle^2 \leq \|f\|^2 \ .$$

On en déduit que la série de terme général $\big\langle f, K_n \big\rangle^2$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \big\langle f, K_n \big\rangle^2 \leq \|f\|^2$ .

## Partie II : Opérateurs linéaires positifs et densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $E$

5. **Propriétes des opérateurs linéaires positifs**

(a) Soit $u$ un opérateur linéaire positif sur $E$. Montrons tout d'abord que l'application $u$ est croissante pour la relation d'ordre partiel. En effet, pour tout $f, g \in E$

$$f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0 \Rightarrow u(f-g) \geq 0 \Rightarrow u(f) - u(g) \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq u(g) \ .$$

Pour montrer l'inégalité annoncée, il suffit de remarquer que

$$\Big(f \leq |f| \ \text{ et } \ -f \leq |f|\Big) \Rightarrow \Big(u(f) \leq u(|f|) \ \text{ et } \ -u(f) = u(-f) \leq u(|f|)\Big) \ .$$

(b) Il est clair que si $u$ est l'opérateur nul alors $u(Q_0) = 0$. Réciproquement, supposons que $u(Q_0) = 0$. Soit $f \in E$ alors $f$ est bornée par une constante $C > 0$, car elle est continue sur le compact $I$. On a donc $|f| \leq C = CQ_0 \Rightarrow |u(f)| \leq u(CQ_0) = Cu(Q_0) = 0$, donc $u(f) = 0$. Ce qui démontre que pour tout $f \in E$, $u(f) = 0$.

(c) Soit $u$ un opérateur linéaire positif non nul sur $E$. Soit $f \in E$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty Q_0$, ce qui donne $|u(f)| \leq u(|f|) \leq \|f\|_\infty u(Q_0)$. De même, si $f, g \in E$, on a

$$|u(f) - u(g)| = |u(f-g)| \leq u(|f-g|) \leq \|f-g\|_\infty u(Q_0) \ ,$$

Or $u(Q_0) > 0$ car $Q_0 > 0$, ce qui montre la continuité de $u$.

(d) Si les fonctions $(u_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ sont positives il est évident que l'opérateur $u_n$ est positif. Réciproquement, supposons que l'opérateur $u_n$ est positif. Soit $0 \leq j \leq n$, puisque les réels $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots x_{n,n}$ sont distincts, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x_{n,j} \in I_j = ]x_{n,j} - \delta, x_{n,j} + \delta[ \cap I \quad \text{et} \quad x_{n,k} \notin I_j, \quad \forall k \neq j \ .$$

On peut donc construire une fonction $f : I \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(x_{n,j}) = 1$ et $f(x_{n,k}) = 0$, $\forall k \neq j$. On a donc pour une telle fonction $f$,

$$u_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k}) u_{n,k} = u_{n,j} \ .$$

Comme $u_n$ est positif, on en déduit que la fonction $u_{n,j}$ est positive.

(e) *Pour cette question on suppose que* $I = [0,1]$, *on se place donc dans* $E = \mathcal{C}^0([0,1])$.

i. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} B_n(f_y)(x) &= \sum_{k=0}^{n} f_y(k/n) B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{(k/n)y} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(x e^{(y/n)}\right)^k (1-x)^{n-k} \\ &= \left(1 - x + x e^{(y/n)}\right)^n \\ &= \varphi_n(x,y) \ . \end{aligned}$$

ii. On a

$$B_n(Q_j)(x) = \sum_{k=0}^{n} (k/n)^j B_{n,k}(x) \ .$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,y) &= \frac{\partial^j}{\partial y^j}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{(ky/n)} B_{n,k}(x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{d^j\left(e^{(ky/n)}\right)}{dy^j} B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(k/n\right)^j e^{(ky/n)} B_{n,k}(x) \ . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \left(k/n\right)^j B_{n,k}(x) = B_n(Q_j)(x) \ .$$

iii. On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
B_n(Q_0)(x) &= \varphi_n(x,0) = 1 \ ,\\
B_n(Q_1)(x) &= n\frac{x}{n}\big(xe^{(0/n)}+1-x\big)^{n-1} = x \ ,\\
B_n(Q_2)(x) &= \frac{n-1}{n}x^2e^{(0/n)}\big(xe^{(0/n)}+1-x\big)^{n-2}\\
&\quad+\frac{1}{n}xe^{(0/n)}\big(xe^{(0/n)}+1-x\big)^{n-1}\\
&= \frac{n-1}{n}x^2+\frac{1}{n}x \ .
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$B_n(Q_0) = Q_0, \quad B_n(Q_1) = Q_1 \quad \text{et} \quad B_n(Q_2) = \frac{1}{n}Q_1 + \frac{n-1}{n}Q_2 \ .$$

6. **Densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $E$.**

(a) La fonction $f$ étant continue sur le compact $I$, elle est donc uniformément continue sur $I$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \eta > 0, \ \ \forall (x,y) \in I^2, \qquad |x-y| \leq \eta \Rightarrow \big|f(x)-f(y)\big| \leq \varepsilon \ . \tag{3}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ défini comme ci-dessus. Soit $(t,x) \in I^2$. Nous allons traiter les deux cas $|t-x| \leq \eta$ et $|t-x| > \eta$ séparément :
- Si $|t-x| \leq \eta$, alors d'après l'uniforme continuité de $f$, on a

$$\big|f(x)-f(t)\big| \leq \varepsilon \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(t-x\big)^2 \ .$$

- Si $|t-x| > \eta$, alors

$$\big|f(x)-f(t)\big| \leq 2\|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty\frac{(t-s)^2}{(t-s)^2} \leq 2\|f\|_\infty\frac{(t-s)^2}{\eta^2} \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(t-x\big)^2 \ .$$

On en déduit donc que

$$\forall (t,x) \in I\times I, \qquad \big|f(t)-f(x)\big| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(t-x\big)^2 \ .$$

(b) C'est une conséquence du résultat de la question précédente. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que

$$\forall (t,x) \in I\times I, \qquad \big|f(t)-f(x)\big| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(t^2-2tx+x^2\big) \ ,$$

ce qui peut s'écrire comme

$$\forall x \in I, \ \forall t \in I, \qquad \big|f(t)-f(x)Q_0(t)\big| \leq \varepsilon Q_0(t) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(Q_2(t)-2xQ_1(t)+x^2Q_0(t)\big),$$

ce qui donne le résultat demandé.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, la positivité de $u$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} |u(f - f(x)Q_0)| &\leq u(|f - f(x)Q_0|) \\ &\leq u\Big(\varepsilon Q_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(Q_2 - 2xQ_1 + x^2 Q_0)\Big) \\ &\leq \varepsilon u(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(u(Q_2) - 2xu(Q_1) + x^2 u(Q_0)\big) \ . \end{aligned}$$

(d) i. Soit $\varepsilon > 0$, puisque pour $0 \leq j \leq 2$, $u_n(Q_j)$ converge uniformément vers $Q_j$ sur $I$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, et $0 \leq j \leq 2$

$$\|u_n(Q_j) - Q_j\|_\infty \leq \varepsilon \ .$$

En remarquant que pour tout tout $t \in I$,

$$\big(Q_2 - 2Q_1^2 + 2Q_2 Q_0\big)(t) = t^2 - 2t^2 + t^2 = 0 \ ,$$

on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\big\|u_n(Q_2) - 2Q_1 u_n(Q_1) + Q_2 u_n(Q_0)\big\|_\infty \\ &\quad = \big\|\big(u_n(Q_2) - Q_2\big) - 2Q_1\big(u_n(Q_1) - Q_1\big) + Q_2\big(u_n(Q_0) - Q_0\big)\big\|_\infty \\ &\quad \leq \big\|u_n(Q_2) - Q_2\big\|_\infty + 2\|Q_1\|_\infty\big\|u_n(Q_1) - Q_1\big\|_\infty + \|Q_2\|_\infty\big\|u_n(Q_0) - Q_0\big\|_\infty \ . \end{aligned}$$

On en déduit la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $I$.

ii. D'après l'inégalité (5), pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} |h_n(x)| &= \big|u_n(f - f(x)Q_0)(x)\big| \\ &\leq \varepsilon u_n(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(u_n(Q_2) - 2xu_n(Q_1) + x^2 u_n(Q_0)\big)(x) \\ &= \varepsilon u_n(Q_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} g_n(x) \ . \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon\|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty + \varepsilon\|Q_0\|_\infty + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\|g_n\|_\infty \ .$$

Comme $\lim_{n\to\infty}\|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty = 0$ et $\lim_{n\to\infty}\|g_n\|_\infty = 0$, on obtient par passage à la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon\|Q_0\|_\infty \ .$$

Ce qui prouve que $h_n$ converge vers la fonction nulle quand $n$ tend vers $+\infty$.

iii. On a pour tout $x \in I$

$$h_n(x) = u_n(f)(x) - f(x)u_n(Q_0)(x),$$

donc
$$u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)\big(u_n(Q_0)(x) - Q_0(x)\big) \ .$$
On en déduit que
$$\|u_n(f) - f\|_\infty \le \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(Q_0) - Q_0\|_\infty \ .$$
Puisque le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, on en conclut que $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$.

(e) Comme les opérateurs $B_n$ sont positifs et compte tenu de ce qui précéde, pour montrer que la suite $(B_n(f))_{n\ge 1}$ converge uniformément vers $f$, il suffit de montrer que $(B_n(Q_j))_{n\ge 1}$ converge uniformément vers $Q_j$ pour $0 \le j \le 2$. Puisque $B_n(Q_0) = Q_0$ et que $B_n(Q_1) = Q_1$, il reste à montrer la convergence uniforme de $B_n(Q_2)$ vers $Q_2$. Or $B_n(Q_2) = \frac{1}{n}Q_1 + \frac{n-1}{n}Q_2$ ce qui implique
$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(Q_2) - Q_2\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|Q_1 - Q_2\|_\infty = 0 \ .$$

(f) On remarque tout d'abord que sur $[0,1]$, pour tout $n \ge 1$, $B_n(f)$ est un polynôme, donc de la question précédente on déduit la densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ pour la norme de le convergence uniforme.

Si maintenant $I = [a,b]$, on considére la fonction $\tau_{a,b} : [0,1] \to I$ définie par $\tau_{a,b}(x) = a + (b-a)x$ qui est polynômiale et dont la réciproque est polynômiale. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors $f \circ \tau_{a,b} \in \mathcal{C}^0([0,1])$. De la remarque précédente, on déduit alors que $(B_n(f\circ\tau_{a,b}))_{n\ge 1}$ converge uniformément vers $f \circ \tau_{a,b}$, donc que $\Big(B_n(f \circ \tau_{a,b}) \circ \tau_{a,b}^{-1}\Big)_{n\ge 1}$ converge uniformément vers $f$. Par conséquent, $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $\mathcal{C}^0(I)$ pour la norme de le convergence uniforme.

(g) Montrons tout d'abord que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$
$$\|f\| \le \sqrt{b-a}\|f\|_\infty \ ,$$
soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, on a
$$\forall t \in [a,b], \quad |f(t)| \le \|f\|_\infty \Rightarrow \forall t \in [a,b], \quad |f(t)|^2 \le \|f\|_\infty^2 \ .$$
Ce qui implique
$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt} \le \sqrt{(b-a)\|f\|_\infty^2} = \sqrt{(b-a)}\|f\|_\infty \ .$$
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}[x]$ qui converge uniformément vers $f$ sur $I$, donc $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$. D'après la remarque précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\|p_n - f\| \le \sqrt{b-a}\|p_n - f\|_\infty \ ,$$
On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\| = 0$ et par la suite la densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathcal{C}^0(I)$ pour la norme $\|.\|$.

**AVRIL 2008**

***CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES***

***VOIE B Option Mathématiques***

**CORRIGÉ DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**DURÉE : 3 HEURES**

## EXERCICE N$^0$1

On dit qu'une matrice carrée (de taille n) $A$ est nilpotente s'il existe un entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$.

1. Calculer $M^p$ et $N^p$, pour tout entier $p \geq 1$, pour les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Solution*

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M^4 = 0,\ M^p = 0 \textit{ pour } p \geq 4.$$

*et*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \ N^3 = 0,\ N^p = 0 \textit{ pour } p \geq 3.$$

2. Montrer que si $A$ est nilpotente alors elle ne peut pas être inversible (*indication : on pourra utiliser $r_0$, le plus petit entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$*).

*Solution*

*Soit $r_0$ le plus petit entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$. Si $A$ était inversible d'inverse $A^{-1}$, on aurait d'abord $A$ non nulle, et ensuite $A^{r_0} = 0$ donc en multipliant $r_0 - 1$ fois $A^{r_0}$ par $A^{-1}$, on trouverait $A = 0$, ce qui est contradictoire.*

3. Montrer que si $A$ est nilpotente alors $I - A$ est inversible et son inverse est

$$I + A + A^2 + \ldots + A^r,$$

pour un entier $r$ à préciser.

*Solution*

*Soit $r_0$ le plus petit entier $r > 0$ tel que $A^r = 0$. En remarquant que*

$$(I-A)(I+A+A^2+\ldots+A^{r_0-1}) = I-A^{r_0} = I \quad \textit{et} \quad (I+A+A^2+\ldots+A^{r_0-1})(I-A) = I-A^{r_0} = I$$

*on en déduit la réponse à la question, avec $r = r_0$.*

4. En utilisant les questions précédentes (sans calculer de déterminant, ni résoudre de système), montrer que la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse $T^{-1}$.

*Solution*

*On a $T = I - N$ où $N$ désigne la matrice nilpotente étudiée dans la question 1. Par conséquent, on déduit de la question précédente que $T = I - N$ est inversible et d'inverse*

$$T^{-1} \;=\; I + N + N^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer qu'une matrice nilpotente (non nulle) n'admet que 0 comme valeur propre et qu'elle n'est donc pas diagonalisable.

   *Solution*

   *Soit $M$ une matrice nilpotente non nulle. Supposons que $\lambda$ soit une valeur propre non nulle de $M$. Il existe alors u vecteur non nul tel que $Mu = \lambda u$. Si $r$ désigne un entier $> 0$ tel que $M^r = 0$, on a alors $0 = M^r u = \lambda^r u$ donc, puisque $\lambda \neq 0$, $u$ est nul, ce qui est impossible. On a donc démontré par l'absurde qu'il ne pouvait pas exister de valeur propre non nulle pour $M$.*

   *Par conséquent, $0$ est l'unique valeur propre de $M$. Si $M$ était diagonalisable, $M$ serait donc nécessairement semblable à la matrice diagonale ne comportant que des $0$ sur sa diagonale, càd il existe une matrice inversible $P$ telle que $P^{-1}MP$ soit la matrice nulle. Ceci implique nécessairement que $M$ est la matrice nulle, ce qui n'est pas possible par hypothèse de travail.*

## EXERCICE N$^0$2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. Le but de cet exercice est de triangulariser cette matrice.

1. Montrer que 3 et $-1$ sont les valeurs propres de $A$ et déterminer les sous-espaces propres associés.

   *Solution*

   *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1+\lambda)(-2)((-5-\lambda)(7-\lambda)+32) = -2(1+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\
&= -2(1+\lambda)^2(\lambda - 3)
\end{aligned}$$

   *donc $3$ est valeur propre simple et $-1$ est valeur propre double.*

$$(A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - 3y + 4z &=& 0 \\ 4x - 10y + 8z &=& 0 \\ 6x - 7y + 4z &=& 0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - 3y + 4z &=& 0 \\ -16y + 16z &=& 0 \\ -16y + 16z &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& y \\ 2x &=& y \end{array} \right.$$

*donc le sous-espace propre associé à la valeur propre* $3$ *est* $SEP_3 = \{(x, 2x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$, *dont* $u_1 = (1, 2, 2)$ *constitue une base.*

$$(A + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 3y + 4z & = & 0 \\ 4x - 6y + 8z & = & 0 \\ 6x - 7y + 8z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - 3y + 4z & = & 0 \\ 0 + 0 + 0 & = & 0 \\ 2y - 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ 2z & = & y \end{array} \right.$$

*donc le sous-espace propre associé à la valeur propre* $-1$ *est* $SEP_{-1} = \{(x, 2x, x); x \in \mathbb{R}\}$, *dont* $u_1 = (1, 2, 1)$ *constitue une base.*

2. En déduire que $A$ n'est pas diagonalisable.

   *Solution*

   *Comme* $-1$ *est valeur propre double et que le sous-espace propre associé est seulement de dimension 1, on en déduit que* $A$ *n'est pas diagonalisable.*

3. Soient $u_1$,$u_2$ et $e_1$ les vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont respectivement $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 1)$ et $(1, 0, 0)$. Montrer que $(u_1, u_2, e_1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   *Solution*

   *On trouve que* $\det(u_1, u_2, e_1) = -2 \neq 0$ *donc* $(u_1, u_2, e_1)$ *constitue une famille libre dans* $\mathbb{R}^3$*, ce qui en fait une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

4. Montrer que $A$ est semblable, dans cette nouvelle base, à la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   *Solution*

   *On doit montrer que* $T = P^{-1}AP$ *où* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*. On trouve*

$$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   *donc*

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**PROBLÈME**

On appelle *Polynômes de Legendre* les polynômes définis par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(X^2-1)^n}{dX^n}, \ n \in \mathbb{N}$$

où "$\frac{d^n}{dX^n}$" signifie dérivée $n-$ième.

Rappelons *la formule de Leibniz* dont on aura besoin dans les questions 3.(a), 4.(c) de la partie 1, et 2.(b) de la partie 2 :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

où la notation $f^{(n)}$ signifie dérivée $n-$ième de $f$ et $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

**Partie 1 :**

1. Calculer $P_1$ et $P_2$.

   *Solution*
   *On a $P_1 = X$ et $P_2 = \frac{1}{2}(3X^2-1)$.*

2. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ le degré de $P_n$ est $n$.

   *Solution*
   *Le polynôme $(X^2-1)^n$ étant de degré $2n$, son polynôme dérivé-$n^{\text{ème}}$ est de degré $n$, ce qui est donc le cas de $P_n$.*

   (b) Montrer que le coefficient $a_n$ de $X^n$ dans $P_n$ vaut $\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}$.

   *Solution*
   *Comme le polynôme $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ et de la forme $X^{2n}+Q$ où $Q$ est un polynôme de degré $2n-1$, son coefficient de degré $2n$ est donc égal à 1, et par conséquent le coefficient de degré $n$ de sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est égal à $(2n)(2n-1)\cdots(n+1)$. Le coefficient de degré $n$ de $P_n$ est donc égal à $\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}$.*

3. (a) En écrivant $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$, montrer que

$$P_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

   *Solution*
   *Il s'agit d'appliquer la formule de Leibniz à $f=(X-1)^n$ et $g=(X+1)^n$, ce qui donne*

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{d^k(X-1)^n}{dX^k}\frac{d^{n-k}(X+1)^n}{dX^{n-k}} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\Big((n)(n-1)\cdots(n-k+1)(X-1)^{n-k}\Big)\times \\
&\qquad\qquad \Big((n)(n-1)\cdots(k+1)(X+1)^k\Big) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\Big((n!/(n-k)!)(X-1)^{n-k}\Big)\Big((n!/k!)(X+1)^k\Big) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k.
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.

*Solution*

*Dans l'expression de $P_n$ établie à la question précédente, en prenant l'indéterminée égale à 1 le seul terme de la somme qui n'est pas nul en raison du facteur $(X-1)^{n-k}$ est celui pour lequel $k = n$, donc*

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n}(C_n^n)^2(1+1)^n = 1$$

*En suivant le même raisonnement, on aboutit à*

$$P_n(-1) = \frac{1}{2^n}(C_n^0)^2(-1-1)^n = (-1)^n.$$

4. Dans la suite, la notation $f'$ désigne la dérivée de $f$.

(a) Montrer que $[(X^2-1)^{n+1}]' - 2(n+1)X(X^2-1)^n = 0$ $(*)$.

*Solution*

*C'est évident, puisque la dérivée de $(X^2-1)^{n+1}$ vaut $(n+1)(2X)(X^2-1)^n$.*

(b) Montrer que $(X^2-1)[(X^2-1)^n]' - 2nX(X^2-1)^n = 0$ $(**)$.

*Solution*

*Idem, puisque la dérivée de $(X^2-1)^n$ vaut $n(2X)(X^2-1)^{n-1}$, il suffit alors de multiplier par $(X^2-1)$.*

(c) En dérivant $(n+1)$ fois la relation $(*)$, montrer que

$$P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n.$$

*Solution*

*On part de*

$$\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}}\left\{[(X^2-1)^{n+1}]'\right\} = 2(n+1)\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}}(X(X^2-1)^n)$$

*ce qui donne, en appliquant la formule de Leibniz à $X$ et $(X^2-1)^n$, et en remarquant que dans la somme qui en découle, il n'y a que 2 termes non nuls (dû au fait que $X^{(0)} = X$, $X' = 1$ et $X^{(k)} = 0$ pour tout $k \geq 2$),*

$$\begin{aligned}
2^{n+1}(n+1)!P'_{n+1} &= 2(n+1)\left[\frac{d^n}{dX^n}(X(X^2-1)^n)\right]' \\
&= 2(n+1)\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{(k)}((X^2-1)^n)^{(n-k)}\right]' \\
&= 2(n+1)\left[C_n^0 X\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n + C_n^1\frac{d^{n-1}}{dX^{n-1}}(X^2-1)^n\right]' \\
&= 2(n+1)\,[2^n(n!)XP_n]' + 2(n+1)\times n2^n(n!)P_n \\
&= 2^{n+1}(n+1)!(P_n + XP'_n) + n2^{n+1}(n+1)!P_n
\end{aligned}$$

*d'où $P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n$.*

**Partie 2 :** On appelle *Opérateur de Legendre* l'application $L$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ L(P) = \frac{d}{dX}((X^2-1)P').$$

où $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$, à coefficients réels.

1. (a) Montrer que $L$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

*Solution*

*Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme le degré de $P$ est $\leq n$, celui de $(X^2-1)P'$ est inférieur ou égal à $n+1$, donc celui de $L(P)$ est $\leq n$. Ainsi $L$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.*
*Il suffit alors de démontrer la propriété de linéarité. Soient $P$ et $Q$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned} L(\lambda P+Q) &= \frac{d}{dX}\left[(X^2-1)(\lambda P'+Q')\right] \\ &= \lambda\frac{d}{dX}\left[(X^2-1)P'\right]+\frac{d}{dX}\left[(X^2-1)Q'\right] \\ &= \lambda L(P)+L(Q) \end{aligned}$$

(b) Donner la matrice $M$ de $L$ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

*Solution*

*On doit déterminer les images par $L$ des polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$. On a $L(1) = 0$, $L(X) = 2X$,*

$$L(X^k) = \left[(X^2-1)kX^{k-1}\right]' = k(X^{k+1}-X^{k-1})' = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

*et ce, pour tout entier $k$ compris entre 2 et $n$. La matrice $M$ de l'endomorphisme $L$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est donc*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 12 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \ddots & & -n(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de $L$ et montrer que $L$ est diagonalisable.

*Solution*

*On vient de déterminer la matrice $M$ de l'endomorphisme $L$, qui se trouve être triangulaire, donc on en déduit les valeurs propres de $L$, qui sont $0, 2, 6, \ldots, k(k+1), \ldots, n(n+1)$. Elles sont au nombre de $n+1$ et toutes distinctes donc elles sont toutes simples et par conséquent $L$ est diagonalisable.*

(b) En dérivant $(n+1)$ fois la relation $(**)$, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$L(P_n) = n(n+1)P_n$$

et en déduire les vecteurs propres de $L$.

*Solution*

*On a d'abord*

$$L(P_n) = \left[(X^2-1)P_n'\right]' = 2XP_n' + (X^2-1)P_n''.$$

*Dérivons maintenant $n+1$ fois le premier membre de la relation $(**)$ :*

$$\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}}\left((X^2-1)[(X^2-1)^n]'\right) - 2n\frac{d^{n+1}}{dX^{n+1}}\left(X(X^2-1)^n\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (X^2-1)^{(k)}[(X^2-1)^n]^{(n+2-k)} \;-\; 2n\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)}[(X^2-1)^n]^{(n+1-k)} \\
&= C_{n+1}^0(X^2-1)[(X^2-1)^n]^{(n+2)} + C_{n+1}^1(2X)[(X^2-1)^n]^{(n+1)} + C_{n+1}^2(2)[(X^2-1)^n]^{(n)} \\
&\qquad -2nC_{n+1}^0(X)[(X^2-1)^n]^{(n+1)} - 2nC_{n+1}^1[(X^2-1)^n]^{(n)} \\
&= (X^2-1)\left[\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n\right]'' + 2(n+1)X\left[\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n\right]' + n(n+1)\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n \\
&\qquad -2nX\left[\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n\right]' - 2n(n+1)\frac{d^n}{dX^n}(X^2-1)^n \\
&= (2^n(n!)) \times \Big((X^2-1)P_n'' + 2(n+1)XP_n' + n(n+1)P_n - 2nXP_n' - 2n(n+1)P_n\Big) \\
&= (2^n(n!)) \times \Big((X^2-1)P_n'' + 2XP_n' - n(n+1)P_n\Big) \\
&= (2^n(n!)) \times (L(P_n) - n(n+1)P_n)
\end{aligned}
$$

*Comme cette expression est nulle, on obtient bien $L(P_k) = k(k+1)P_k$ et ce, pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$ : $P_k$ est donc vecteur propre de l'endomorphisme $L$ associé à la valeur propre $k(k+1)$.*

(c) Expliquer pourquoi $\mathbb{R}_n[X] = Vect(P_0) \oplus \ldots \oplus Vect(P_n)$, où $Vect(P_k)$ est le sous-espace vectoriel engendré par $P_k$. Que peut-on dire de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ ?

*Solution*

*On vient d'établir que les sous-espaces $Vect(P_0), \ldots, Vect(P_n)$ sont les sous-espaces propres de l'endomorphisme $L$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme on a montré que $L$ était diagonalisable, on sait alors que ces sous-espaces sont en somme directe et que $\mathbb{R}_n[X]$ est égal à cette somme directe $Vect(P_0) \oplus \ldots \oplus Vect(P_n)$. La famille des $(n+1)$ vecteurs $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ forme donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

**Partie 3 :** Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on définit, pour tous $P$ et $Q$, le produit scalaire

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

et la norme euclidienne $||P|| = \sqrt{< P, P >}$. Le but de cette partie est de montrer que les Polynômes de Legendre vérifient :

$$< P_i, P_j >= 0 \text{ pour tous } i \neq j \text{ et } ||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1} \text{ pour tout } n \geq 0$$

et donc que la base $(P_0, \ldots, P_n)$ est orthogonale.

1. (a) Montrer que pour tous $i$ et $j$, $< L(P_i), Pj > = < P_i, L(P_j) >$ (*indication* : effectuer une intégration par parties).

*Solution*

*On a*

$$
\begin{aligned}
< L(P_i), P_j > &= \int_{-1}^{1} L(P_i)(t)P_j(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{d}{dt}[(t^2-1)P_i'(t)].P_j(t)\,dt \\
&= \Big[(t^2-1)P_i'(t)P_j(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)P_i'(t)P_j'(t)\,dt \\
&= -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P_j'(t)P_i'(t)\,dt \\
&= < L(P_j), P_i > \;=\; < P_i, L(P_j) >
\end{aligned}
$$

(b) En déduire que pour tous $i \neq j$, $< P_i, P_j >= 0$.

*Solution*

*Soit $i \neq j$. Puisque $L(P_i) = i(i+1)P_i$ et $L(P_j) = j(j+1)P_j$, le résultat précédent implique que*

$< i(i{+}1)P_i, P_j >=< P_i, j(j{+}1)P_j >$ *donc* $i(i{+}1) < P_i, P_j > -j(j{+}1) < P_i, P_j >= 0$

*or $i \neq j$ donc nécessairement $< P_i, P_j >= 0$.*

2. (a) Soient $(\beta_0, \dots, \beta_n)$ les coordonnées de $P'_{n+1}$ dans la base $(P_0, \dots, P_n)$, montrer que

$$\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)P_n(t)dt = \beta_n ||P_n||^2.$$

*Solution*

*On a $P'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k P_k$ donc, en vertu du résultat de la question précédente*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)P_n(t)dt &= < P'_{n+1}, P_n > = < \sum_{k=0}^{n} \beta_k P_k, P_n > \\ &= \sum_{k=0}^{n} \beta_k < P_k, P_n > = \beta_n < P_n, P_n > = \beta_n \|P_n\|^2 \end{aligned}$$

(b) Montrer que $\beta_n = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}$, où $a_n$ a été défini dans la partie 1.

*Solution*

*Comme $a_{n+1}$ est le coefficient de degré $n+1$ de $P_{n+1}$, le coefficient de degré $n$ de $P'_{n+1}$ est $(n+1)a_{n+1}$. Or, par définition des $\beta_k$ et de $a_n$, on sait que le coefficient de degré $n$ de $P'_{n+1} = \beta_0 P_0 + \ldots + \beta_n P_n$ est égal à $\beta_n a_n$, puisque $P_n$ est le seul des $P_k$ a avoir un coefficient de degré $n$ non-nul. D'où $\beta_n a_n = (n+1)a_{n+1}$, cqfd.*

3. (a) Par intégration par parties et en se servant d'un résultat de la partie 1, montrer que

$$\int_{-1}^{1} (P_n(t))^2 dt = 2 - 2\int_{-1}^{1} tP'_n(t)P_n(t)dt.$$

*Solution*

*On a, puisque $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$,*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (P_n(t))^2 dt &= \left[t(P_n(t))^2\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} t.2P'_n(t)P_n(t)dt \\ &= 2 - 2\int_{-1}^{1} tP'_n(t)P_n(t)dt \end{aligned}$$

(b) En déduire que $||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1}$.

*Solution*

*Il faut utiliser plusieurs des résultats démontrés précédemment. En partant de l'équation de la question 2)a), et en utilisant le fait que*

$$tP'_n(t) = P'_{n+1}(t) - (n+1)P_n(t)$$

*(question 4 de la partie 1), on a*

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= 2 - 2\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)P_n(t)dt + 2(n+1)\int_{-1}^{1} (P_n(t))^2 dt \\ &= 2 - 2\beta_n \|P_n\|^2 + 2(n+1)\|P_n\|^2 \end{aligned}$$

*donc $(1 + 2\beta_n - 2(n+1))\|P_n\|^2 = 2$. Or*

$$\beta_n = (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)\ldots(n+2)}{(2n)\ldots(n+2)(n+1)}\frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = 2n+1$$

*d'où $2 = (1 + 2(2n+1) - 2n - 2)\|P_n\|^2 = (2n+1)\|P_n\|^2$.*