Avril 2007

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES
ITS B OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Exercice 1

1. Lorsque $0 \leq a \leq 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $0 < k + a \leq k + 1$ et on en déduit

$$0 < \prod_{k=1}^{n}(k+a) \leq (n+1)!$$

d'où

$$u_n \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la série $\sum u_n \geq \sum \frac{1}{n+1}$ est divergente.

2. a) Montrons par récurrence sur n la relation, pour tout $n \geq 2$, $S_{n-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}\, u_n$.

- pour $n = 2$, on a

$$\frac{1}{a-1} - \frac{2+a}{a-1}u_2 = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{2}{a+1}\right) = \frac{1}{a+1},$$
$$S_1 = u_1 = \frac{1}{a+1}.$$

- supposons la relation vérifiée pour tout $k \leq n-1$. Alors on a

$$\begin{aligned}
S_n = S_{n-1} + u_n &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}u_n + u_n \\
&= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+a)u_n + (a-1)u_n\right) \\
&= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+1)u_n\right) \\
&= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+1)\frac{(n+a+1)u_{n+1}}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1}u_{n+1}.
\end{aligned}$$

b) La série $\sum u_n$ est une série à termes positifs telle que la suite des sommes partielles (S_n) reste majorée par $\frac{1}{a-1}$. Cette série est donc convergente et on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ell \leq \frac{1}{a-1}.$$

c) Supposons que $\ell < \frac{1}{a-1}$. Dans ce cas, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+a}{a-1}u_n = \frac{1}{a-1} - \ell = \alpha > 0$$

et $u_n \sim \alpha$ ou $u_n \sim \frac{(a-1)\alpha}{n}$, ce qui entraînerait la divergence de la série $\sum u_n$. Ainsi, on en déduit $\ell = \frac{1}{a-1}$.

Exercice 2

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|e^{-x}\sin^{2n} x| \leq e^{-x}$, donc $|J_n| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}dt < \infty$, ce qui entraîne que J_n existe pout tout n.

b) On a directement $J_0 = 1$.

2) a) Soit $A > 0$. Par intégration par parties on a

$$\int_0^A e^{-t}\sin^{2n} t dt = \left[-e^{-t}\sin^{2n} t\right]_0^A + 2n\int_0^A e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t dt\ ,$$

d'où, en faisant tendre A vers l'infini, l'expression

$$J_n = 2n\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\ dt\ .$$

De nouveau par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^A e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t dt}{2n} &= \left[-e^{-t}\sin^{2n-1} t\cos t\right]_0^A + \\ &\int_0^A e^{-t}((2n-1)\sin^{2n-2} t\cos^2 t - \sin^{2n} t)dt\end{aligned}$$

et donc, par passage à la limite quand A tend vers l'infini,

$$J_n = 2n((2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n - J_n)$$

soit encore

$$J_n = \frac{2n(2n-1)}{1+4n^2}J_{n-1}\ .$$

b) On a par positivité de la fonction sous l'intégrale, $J_n \geq 0$ pour tout n. La relation obtenue en a) montre que la suite (J_n) est décroissante. La suite est décroissante et minorée donc convergente.

3) a) On a par un simple développement limité

$$\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1+2k}{1+4k^2}\right) \sim -\frac{1+2k}{1+4k^2} \sim -\frac{1}{2k}\ .$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$ est donc de même nature que $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ qui est divergente et de limite $-\infty$.

b) On a d'après 2)a) l'égalité $\ln\left(\frac{J_k}{J_{k-1}}\right) = \ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$. Donc, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{J_k}{J_{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right).$$

On en déduit donc par sommation que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{J_k}{J_{k-1}}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(J_k\right) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(J_{k-1}\right) \\ &= \ln J_n - \ln J_0 = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)\ .\end{aligned}$$

Cela entraîne que $\lim_{n\to+\infty} \ln J_n = -\infty$ donc que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

4) a) Soit $k \geq 0$. Alors par un simple changement de variable et en utilisant la périodicité de la fonction *sin*, on a

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi} e^{-u-k\pi} \sin^{2n} u du \ .$$

On en déduit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt &= \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin^{2n} t dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{N} e^{-u-k\pi} \right) \sin^{2n} u du \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1 - e^{-(N+1)u}}{1 - e^{-u}} e^{-u} \sin^{2n} u du \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \sin^{2n} u du \\
&\leq \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \int_0^{\pi} \sin^{2n} u du \ .
\end{aligned}$$

Ceci restant vérifier pour tout N, l'inégalité en découle par passage à la limite.

b) On va montré que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = 0$. On a trivialement

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n} t dt \ .$$

Le changement de variable $u = \pi - t$ dans la seconde intégrale permet d'écrire que $\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt$. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^{2n} t dt \leq \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} dt \leq \varepsilon \ .$$

Par ailleurs, par croissance de la fonction *sin* sur $[0, \pi/2]$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^{2n} t dt \leq \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right)^{2n} \times \frac{\pi}{2} \ .$$

Comme $0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < 1$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$0 \leq \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right)^{2n} < \varepsilon.$$

Ceci entraîne que lorsque n tend vers l'infini, J_n tend vers 0.

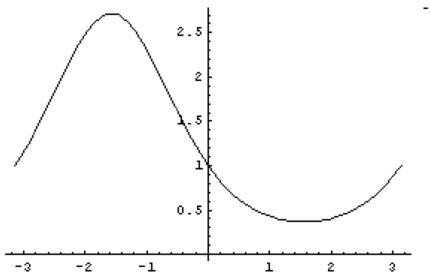
Problème

Première Partie

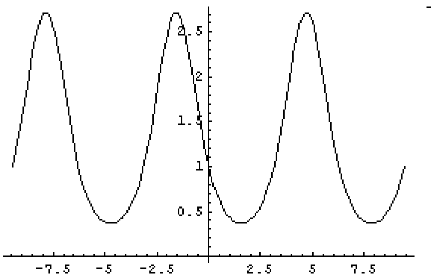
1) La fonction est clairement continue, infiniment dérivable par composition de fonctions infiniment dérivables. On a directement

$$f'(t) = -\cos(t)e^{-\sin(t)},$$

de signe inverse à $cos(t)$, le tableau de variation et le tracé de la fonction s'en déduisent immédiatement



Par périodicité de la fonction f (de période 2π) on en déduit le tracé sur $\mathbb{R}$ suivant



2) L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, appliquée à la fonction exponentielle sur le segment $[0, u]$ donne

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \sup_{[0,u]} \left| \frac{d^2 \exp(t)}{dt^2} \right|.$$

Si $u > 0$, $\sup\limits_{[0,u]} |\exp''(t)| = e^u$, si $u \leq 0$, $\sup\limits_{[0,u]} |\exp''(t)| = e^0 = 1$, et dans les deux cas on a bien : $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

3) On pose

$$\Delta(h) = |\varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t \, dt|.$$

Soit en ramenant tout sous la même intégrale

$$\begin{aligned}\Delta(h) &= |\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t}(e^{-h \sin t} - 1 - h \sin t) \, dt| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} |e^{-h \sin t} - 1 - h \sin t| \, dt.\end{aligned}$$

En utilisant 2) on obtient donc

$$\begin{aligned}\Delta(h) &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\frac{h^2\sin^2 t}{2}e^{|h|\sin t}\,dt \\ &\leq \frac{h^2e^{|h|}}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\,dt \leq \frac{h^2e^{|h|}}{2}\varphi(x).\end{aligned}$$

4) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on déduit de 3)

$$|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_0^{\pi/2} - e^{-x\sin t}\sin t\,dt| \leq \frac{1}{2}|h|e^{|h|}\varphi(x).$$

Comme $\lim_{h\to 0}|h|e^{|h|} = 0$, on en déduit que φ est dérivable au point x, avec

$$\varphi'(x) = -\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\sin t\,dt.$$

Pour montrer que la dérivée seconde existe on peut mener à bien le même type de calcul sur φ (avec Taylor-Lagrange à l'ordre 2) ou en travaillant directement sur $\varphi'(x)$. Le même type de calcul montre que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\varphi''(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\sin^2 t\,dt.$$

5) Les fonctions sous les intégrales étant positives, il est immédiat de montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) < 0$ et $\varphi''(x) > 0$. Comme φ' est strictement croissante, on a, pour tout $x < 0,\ \varphi'(x) > \varphi'(0) = -1$ d'où le résultat.

6) Par concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$, on obtient directement $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ ($\sin(t)$ est au dessus de du segment qui relie les points $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$ de pente $2/\pi$).

7) La fonction $\delta : x \mapsto x - \varphi(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle s'annule donc en au plus un réel. On a de plus

$$\delta(0) = -\varphi(0) = -\pi/2 < 0 \text{ et } \delta(1) = 1 - \varphi(1) > 0.$$

En effet, d'après ce qui précède

$$\varphi(1) = \int_0^{\pi/2} e^{-\sin t}dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2t/\pi}dt = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1}) < 1.$$

Il en résulte qu'il existe un unique α tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \in]0, 1[$.

8) D'après l'étude de la fonction f pour tout $\varepsilon > 0$ $\sup_{x\in[\varepsilon,\pi/2-\varepsilon]} f(x) = \delta(\varepsilon) < 1$. On en déduit que, pour $x > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t} &= \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} (e^{-\sin t})^x dt + \int_0^\varepsilon (e^{-\sin t})^x dt + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} (e^{-\sin t})^x dt \\ &\leq \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \delta(\varepsilon)^x dt + \int_0^\varepsilon 1dt + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} 1dt \\ &\leq \delta(\varepsilon)^x\pi/2 + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

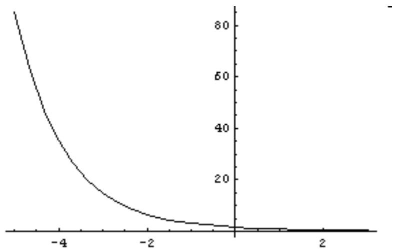
Lorsque $x \to +\infty$, le membre de droite peut être choisi arbitrairement petit et tend donc vers 0 d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Inversement on a $\inf_{x \in [0,\pi/2]} f(x) = \eta < 1$ et on obtient

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \geq \int_0^{\pi/2} \eta^x dt = \eta^x \to +\infty \text{ quand } x \to -\infty,$$

d'où $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$. On déduit de ce qui précède le graphe de la fonction.



Deuxième partie

9) La fonction $t \mapsto e^{-x \sin t}$ étant continue, positive et non identiquement nulle sur le segment d'intégration $[0, \pi/2]$, on a $\varphi(x) > 0$. Comme φ est strictement décroissante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) < \varphi(0) = \pi/2\ .$$

10) Si $u_2 = \alpha$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 2. La suite est même constante, puisque φ étant injective l'équation $\varphi(x) = \alpha$ n'admet que la solution α et donc $u_1 = \alpha$ et $u_0 = \alpha$.

11) Comme φ est strictement décroissante, on a $\varphi(u_2) > \varphi(\alpha)$, d'où $u_3 > \alpha$. On en déduit par récurrence simple

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}\ .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par le théorème des accroissements finis, on a

$$\exists\, a \in [\alpha, u_n]\ n \in \mathbb{N}_+^*, \varphi(u_n) - \varphi(\alpha) = \varphi'(a)(u_n - \alpha)\ .$$

On en déduit que $|u_{n+1} - \alpha| < |u_n - \alpha|$, c'est à dire suite $|u_n - \alpha|$ est strictement décroissante. On en déduit avec ce qui précède que

$$\begin{aligned} \alpha - u_{2n+2} &< \alpha - u_{2n} \\ u_{2n} &< u_{2n+2}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. De plus comme φ est décroissante, la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît strictement. Pour tout $x \in [u_2, u_3]$, on a $\varphi'(u_2) \leq \varphi'(x) < 0$ et $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(u_2)| < 1$. Pour tout $n \geq 2$, on a donc : $|u_{n+1} - \alpha| \leq |\varphi'(u_2)|.|u_n - \alpha|$. Ainsi $\forall n \geq 2, |u_n - \alpha| \leq |\varphi'(u_2)|^{n-2}|u_2 - \alpha|$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

12) Si $u_2 > \alpha$, alors $0 < u_1 < \alpha$ et il suffit de permuter les rôles des indices pairs et des indices impairs et la conclusion est identique.

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 HEURES

EXERCICE N^{0}1

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice M suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & m-2 \\ 2 & m-4 & -2 \\ m+2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

   Pour quelles valeurs de m cette matrice est-elle inversible ? Calculer, dans ce cas, la matrice inverse M^{-1}.

   Correction : $det(M) = (2-m)(m-1)^2$ donc M est inversible si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq 2$. Dans ce cas,

$$M^{-1} = \frac{1}{(m-2)(m-1)^2} \begin{pmatrix} 3m-4 & 4m-5 & m^2-6m+6 \\ 2(m-1) & m^2-1 & 2(1-m) \\ m(m-2) & m-2 & 2-m \end{pmatrix}$$

2. Soient a, b, c dans $\mathbb{R}$. Résoudre, en utilisant le 1), le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + (m-2)z & = & a \\ 2x + (m-4)y - 2z & = & b \\ (m+2)x - 4y - 3z & = & c \end{array} \right.$$

   Correction : Le système s'écrit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   - *si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, M est inversible et le système admet une solution unique* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *pour tout (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$.*
   - *si $m = 1$, le système s'écrit*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & a \\ 2x - 3y - 2z & = & b \\ x - y - z & = & c - b \end{array} \right.$$

Si $a \neq c - b$, il n'y a pas de solutions et si $a = c - b$, le système devient

$$\begin{cases} x - y - z & = & c - b \\ y & = & 2c - 3b \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions s'écrit $\{(x, 2c - 3b, x - 3c + 4b), x \in \mathbb{R}\}$.

- *si $m = 2$, le système s'écrit*

$$\begin{cases} x - y & = & a \\ z & = & \frac{2a-b}{2} \\ z & = & \frac{4a-c}{3} \end{cases}$$

Si $2a + 3b - 2c \neq 0$, il n'y a pas de solutions et si $2a + 3b - 2c = 0$, alors l'ensemble des solutions s'écrit $\{(x, x - a, \frac{2a-b}{2}), x \in \mathbb{R}\}$.

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Notons f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) & = & e_1 + 2e_2 + (m+2)e_3 \\ f(e_2) & = & -e_1 + (m-4)e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) & = & (m-2)e_1 - 2e_2 - 3e_3 \end{cases}$$

(a) Quelle est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

Correction : Il s'agit de la matrice M.

(b) Pour quelles valeurs de m, l'application f est-elle bijective ? Donner, dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3) ?

Correction : f est bijective si et seulement si M est inversible, c'est à dire, si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq 2$. Dans ce cas, la matrice de f^{-1} dans la base (e_1, e_2, e_3) est M^{-1} calculée à la question 1.

(c) Pour quelles valeurs de m, les sous-espaces $Kerf$ et Imf de E sont-ils supplémentaires ?

Correction : Il suffit de trouver pour quelles valeurs de m $Kerf \cap Imf = \{0\}$. Le vecteur X est dans $Kerf$ si et seulement si ses coordonnées (x, y, z), dans la base (e_1, e_2, e_3), vérifient le système de la question 2 avec $a = b = c = 0$. Ainsi, si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, X est obligatoirement le vecteur nul et dans ce cas $Kerf \cap Imf = \{0\}$. Si $m = 1$ alors le vecteur X est de la forme ${}^t(a\ 0\ a)$, où $a \in \mathbb{R}$ et il est facile de vérifier que tous ces vecteur là sont dans Imf, donc que $Kerf \cap Imf \neq \{0\}$. Si $m = 2$, alors le vecteur X est de la forme ${}^t(b\ b\ 0)$, où $b \in \mathbb{R}$ et il est facile de vérifier que ces vecteurs (sauf le vecteur nul) ne sont pas dans Imf et donc $Kerf \cap Imf = \{0\}$. En conclusion, les sous-espaces $Kerf$ et Imf de E sont supplémentaires si et seulement si $m \neq 1$.

EXERCICE N^{0}2

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ? En particulier, préciser leur ordre de multiplicité.

   Correction : Le polynôme caractéristique de f est $P_X = (1-X)(2-X)(m-X)$. Ainsi, lorsque m est différent de 1 et de 2, f admet trois valeurs propres 1, 2 et m. Lorsque $m = 1$, 1 est valeur propre double et 2 valeur propre simple et lorsque $m = 2$, 1 est valeur propre simple et 2 valeur propre double.

2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier soigneusement la réponse.

   Correction :

   - *Lorsque m est différent de 1 et de 2, f admet trois valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}^3$.*
   - *Lorsque $m = 1$, 1 est valeur propre double. Cherchons la dimension de E_1, le sous-espace propre associé. Soit le vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique :*

     $$f(u) = u \Leftrightarrow (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x &= y \\ z &= 0 \end{cases}$$

     Ainsi, le sous-espace $E_1 = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ est de dimension 1 alors que 1 est valeur propre double . f n'est donc pas diagonalisable quand $m \neq 1$.
   - *Lorsque $m = 2$, 2 est valeur propre double. Cherchons la dimension de E_2, le sous-espace propre associé. Soit le vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique :*

     $$f(u) = 2u \Leftrightarrow (A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow z = x.$$

     Ainsi, le sous-espace $E_2 = \{(x, y, x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est de dimension 2 qui est bien l'ordre de multiplicité de la valeur propre 2. f est donc diagonalisable quand $m = 2$.

   En conclusion, f est diagonalisable si et seulement si $m \neq 1$.

3. Lorsque $m = 2$, déterminer une base de vecteurs propres de f puis calculer A^k, pour tout entier $k \geq 1$.

   Correction : à présent, $m = 2$. Nous cherchons une base (u_1, u_2, u_3) de vecteurs propres de f où u_1 est associé à la valeurs propre 1 et u_2 et u_3 sont associés à la valeur propre 2. Le sous-espace E_2, ayant été déterminé à la question précédente, on peut prendre $u_2 = {}^t(0\ 1\ 0)$ et $u_3 = {}^t(1\ 0\ 1)$. Cherchons à présent un vecteur u_1 de la forme ${}^t(x\ y\ z)$ et vérifiant $f(u_1) = u_1$. Il vérifie $x = y$ et $z = 0$, on peut donc prendre $u_1 = {}^t(1\ 1\ 0)$.

La matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3) *est donc*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A *s'écrit alors sous la forme* PDP^{-1}*, où* $D = diag(1, 2, 2)$ *et*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A^k = PD^kP^{-1}$*, d'où*

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Problème

On se place dans un espace euclidien $(\mathcal{E}, < \cdot, \cdot >)$ de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

Remarque : dans l'énoncé, des précautions sont prises pour distinguer un élément de $\mathcal{E}$ de la matrice colonne des coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$. On pourra donc recommander aux candidats de prendre les mêmes précautions dans leur copie. On rappelle également que si u et v sont deux éléments de $\mathcal{E}$ de matrices colonnes de coordonnées U et V dans la base $\mathcal{B}$, alors on a l'écriture $< u, v >= {}^tUV$, où ${}^tU$ est la matrice transposée de U.

1. On rappelle qu'une projection est un endomorphisme p de $\mathcal{E}$ qui est idempotent ($p^2 = p$), et que la projection orthogonale sur un sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est la projection p telle que $\mathcal{F} = Im(p) \perp Ker(p)$.

   (a) Montrer que si p est une projection et que la matrice P de p par rapport à la base $\mathcal{B}$ est symétrique, alors p est une projection orthogonale.

   Correction : Soit $u \in Ker(p)$, il suffit de montrer que $u \perp Im(p)$. Soit $v \in \mathcal{E}$ et notons U et V les colonnes des coordonnées des vecteurs u et v dans la base $\mathcal{B}$. On a

   $$< u, p(v) > = {}^tUPV = {}^tU({}^tP)V = {}^t(PU)V = < p(u), v > = 0$$

   puisque $p(u) = 0$.

   (b) Soit la matrice

   $$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Montrer que P est la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, d'une projection orthogonale p sur un sous-espace $\mathcal{F}$ dont on déterminera une base dans $\mathcal{E}$.

   Correction : P est symétrique, et on vérifie que

   $$P^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 30 & -6 \\ 12 & -6 & 30 \end{pmatrix} = P.$$

   Il nous reste à déterminer $\mathcal{F} = Im(p)$. Soient $U = {}^t(x\ y\ z)$ et $V = {}^t(a\ b\ c)$ deux vecteurs colonnes quelconques : on a

   $$\begin{aligned} PU = V \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 6a \\ 2x + 5y - z &= 6b \\ 2x - y + 5z &= 6c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 6a \\ 3y - 3z &= 6(b - a) \\ -3y + 3z &= 6(c - a) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 6a \\ 3y - 3z &= 6(b - a) \\ 0 &= 6(b + c - 2a) \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi, $v \in \mathcal{E}$ appartient à $Im(p)$ si et seulement si $b + c - 2a = 0$, où (a, b, c) désignent les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$: p est donc la projection orthogonale sur le plan d'équation $y + z - 2x = 0$, dont une base possible a comme coordonnées $(1, 2, 0)$ et $(1, 0, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soient $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de dimension $p \leq n$ de $\mathcal{E}$, et $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une base de $\mathcal{F}$.

On note $V_1, V_2, \dots, V_p$ les matrices colonnes $n \times 1$ des coordonnées des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$ dans la base $\mathcal{B}$, et M la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les V_i.

On considère la matrice ${}^tMM$ $(p \times p)$, dont le coefficient d'ordre (j,k) est $< v_j, v_k >$.

(a) Montrer que le sous-espace $\mathcal{F}$ est exactement constitué des vecteurs de $\mathcal{E}$ dont la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $M\Lambda$ où Λ est une matrice colonne $p \times 1$ (cette propriété sera utile à plusieurs reprises lors de la résolution de cet exercice).

Correction : les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont exactement les vecteurs de la forme $u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j$. En notant Λ la matrice colonne ${}^t(\lambda_1 \dots \lambda_p)$, on constate que le vecteur u a comme vecteur de coordonnées $M\Lambda$ (car la coordonnée k de u vaut $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (v_j)_k$, et que $(v_j)_k$, kème coordonnée de v_j, est égal à M_{kj} par construction de M, donc la somme ci-dessus vaut $\sum_j M_{kj}\Lambda_j = (M\Lambda)_k$).

(b) Justifier l'inclusion $Ker(M) \subset Ker({}^tMM)$.

Correction : immédiat, puisque $MU = 0$ implique ${}^tMMU = 0$.

(c) Soit $U = {}^t(U_1\, U_2\, \dots\, U_p)$ une matrice colonne telle que ${}^tMMU = 0$, et w le vecteur de $\mathcal{E}$ défini par $w = \sum_{i=1}^{p} U_k v_k$: la matrice colonne des coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$ est donc MU.

Montrer que $< v_j, w >= 0$ pour tout $j = 1, .., p$, et en déduire que $w = 0$. Justifier alors l'égalité $Ker(M) = Ker({}^tMM)$.

Correction : comme $w = \sum_{i=1}^{p} U_k v_k$, on a $< v_j, w >= \sum_{k=1}^{p} < v_j, v_k > U_k$. Or par hypothèse ${}^tMMU = 0$ donc, puisque les coordonnées de ${}^tMM$ sont les $< v_j, v_k >$, on a

$$\textstyle\sum_{k=1}^{p} < v_j, v_k > U_k = 0 \textit{ pour tout } j = 1, .., p,$$

d'où $< v_j, w >= 0$ pour tout j. En multipliant la $j^{\text{ème}}$ égalité par U_j et en sommant le tout en j, on obtient alors

$$0 =< \textstyle\sum_{j=1}^{p} U_j v_j, \sum_{k=1}^{p} U_k v_k >=< w, w >= \|w\|^2$$

autrement dit $w = 0$ et par conséquent $MU = 0$. On a donc montré que ${}^tMMU = 0$ impliquait $MU = 0$, donc que $Ker({}^tMM) \subset Ker(M)$, cqfd.

(d) En déduire que ${}^tMM$ a même rang que M.

Correction : on le déduit de la question précédente et du théorème du rang

$$rg(M) + dim(Ker(M)) = rg({}^tMM) + dim(Ker({}^tMM)).$$

(e) Montrer que ${}^tMM$ est inversible.

Correction : par hypothèse, M a pour rang p, puisque les v_i forment une base du sous-espace $\mathcal{F}$ de dimension p, donc ${}^tMM$, de taille $p \times p$, est de rang maximum donc inversible.

(f) Puisque ${}^tMM$ est inversible, il est donc possible de considérer la matrice

$$P = M\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM$$

Montrer que P est la matrice (par rapport à la base $\mathcal{B}$) de la projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{F}$ engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.

Correction : on procède par étapes

- *la matrice P est symétrique, car, en utilisant plusieurs propriétés matricielles connues, on a*

$${}^tP = {}^t\left(M\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM\right) = {}^t({}^tM)^t\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM = M\left({}^t({}^tMM)\right)^{-1}{}^tM = P.$$

- *ensuite, on a bien*

$$P^2 = M({}^tMM)^{-1}({}^tMM)\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM = M\left(({}^tMM)^{-1}\right){}^tM = P.$$

- *P est donc la matrice d'une projection orthogonale p, et en notant $\mathcal{G} = Im(p)$, il nous faut donc montrer que*

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}$$

La première inclusion est aisée : si $u \in \mathcal{G}$, ses coordonnées s'écrivent sous la forme PV, or $PV = M\Lambda$ (où $\Lambda = ({}^tMM)^{-1}({}^tM)V$) donc appartient à $\mathcal{F}$ (cf question 2a).

Il nous reste donc à établir que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Soit $u \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire (cf question 2a) le vecteur u a pour vecteur de coordonnées la matrice colonne $U = M\Lambda$ où Λ est une matrice colonne ${}^t(\lambda_1 \ldots \lambda_p)$.
Par conséquent, puisque $p(u)$ a comme coordonnées PU, on a

$$PU = PM\Lambda = M({}^tMM)^{-1}({}^tMM)\Lambda = M\Lambda = U,$$

autrement dit $p(u) = u$, donc $u \in Im(p)$ (et même plus : la projection p laisse $\mathcal{F}$ invariant), donc $\mathcal{F} \subset Im(p) = \mathcal{G}$, CQFD.