CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE
OPTION MATHEMATIQUES

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUE

Exercice 1 (très facile)

a) On a trivialement

$$\begin{aligned}
I_n(f) &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^+} (f(x)) \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}dx \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} (f(x)) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} (f(x)) \,(\lim_{x\to\infty} Arc\tan(x) - Arc\tan(0)) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} (f(x)) \,\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

b) On a par simple changement de variable

$$\begin{aligned}
I_n(f_0) &= \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_n(f_1) &= \int_0^{1} \frac{xn}{1+n^2x^2}dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{n} \frac{x}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{2n}\log(1+n^2)
\end{aligned}$$

c) On en déduit immédiatement

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f_0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f_1) = 0$$

d) On a donc

$$S_n(f_0) = n\frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f_0) = \infty.$$

e) Le terme générique de la série $S_n(f_1)$ est $I_n(f_1)$ qui est positif et tel que

$$I_n(f_1) \geq \frac{1}{n}.$$

Donc $S_n(f_1)$ diverge.

f) On va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N, tel pour tout n>N

$$|I_n(f) - \frac{\pi}{2}f(0)| \leq \varepsilon$$

On a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}
|I_n(f) - \frac{\pi}{2}f(0)| &= |\int_0^{+\infty} f(x)\frac{n}{1+n^2x^2}dx - \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}dx| \\
&= |\int_0^{+\infty} (f(x)-f(0))\frac{n}{1+n^2x^2}dx| \\
&\leq \int_0^{\delta} |f(x)-f(0)|\frac{n}{1+n^2x^2}dx + \int_\delta^{\infty} |f(x)-f(0)|\frac{n}{1+n^2x^2}dx \\
&= I(\delta) + II(\delta), \text{ pour tout } \delta > 0
\end{aligned}$$

Par continuité de $f(x)$ en 0, on a pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta > 0$ tel que

$$I(\delta) \leq \varepsilon/2.$$

On a

$$II \leq 2\sup(f(x)\int_{n\delta}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx -> 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Donc pour δ fixé précédemment, il existe N tel que pour tout $n > N$, $II(\delta) \leq \varepsilon/2$ d'où finalement

$$|I_n(f) - \frac{\pi}{2}f(0)| \leq \varepsilon.$$

Pour que la série converge, il faut nécéssairement que la limite soit nulle c'est à dire ici

$$f(0) = 0.$$

g) On a $f_2(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, qui est bien définie continue comme quotient bien définie de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. On a $f_2'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f_2 est positive, croissante sur $\mathbb{R}^+$et sa limite en ∞, vaut 1, soit

$$0 \leq f_2(x) \leq 1.$$

$$I_n(f_2) = n\int_0^{\infty}\frac{x}{(1+x)(1+n^2x^2)}dx,$$

mais

$$\frac{x}{(1+x)(1+n^2x^2)} = \frac{1}{1+n^2}(\frac{-1}{1+x} + \frac{n^2x+1}{1+n^2x^2}).$$

On en déduit pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^A (\frac{-1}{1+x} + \frac{n^2x+1}{1+n^2x^2}) &= -\log(1+A) + \frac{1}{2}\log(n^2A^2+1) + \frac{1}{n}Arctg(nA) \\
&= \log(\frac{n\sqrt{1+A^2}}{A+1}) + \frac{1}{n}Arctg(nA)
\end{aligned}$$

d'où

$$I_n(f_2) = \frac{n}{1+n^2}(\log(n) + \frac{\pi}{2n}).$$

Comme $I_n(f) \sim \frac{\log(n)}{n}$ quand $n \to \infty$, on en déduit immédiatement que la série $S_n(f_2)$ est divergente.

h) Un exemple trivial est $f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^+$. On a alors $I_n(f) = 0$ et $S_n(f) = 0$... Question subsidaire: est ce la seule solution possible?

Exercice 2

a) On a $f(t) = \frac{\sin(t)}{t(1+t^2)}$ qui est clairement paire. Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ Comme en 0, $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$ on peut clairement prolonger la fonction par continuité en posant $f(0) = 0$. f est alors continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[-\pi, \pi]$. Sur $\mathbb{R}^*$, $f(.)$ est infiniment dérivable et on a

$$f'(x) = (x(1 + x^2))\cos(x) - (1 + 3x^2)\sin(x))/x^2(1 + x^2)^2.$$

Quand $x \to 0$, on a clairement $f'(x) \sim (x(1+x^2)-(1+3x^2)x)/x^2 = -2x \to 0$ quand $x \to 0$. Donc $f\prime(x)$ est prolongeable par continuité en 0 et $f'(x)$ est donc dérivable sur $[-\pi, \pi]$

b) On a

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt.$$

En $t = 0$, $\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \sim \frac{tx}{t(1+t^2)} \sim x$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Par ailleur en $+\infty$, $|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}| \leq \frac{1}{t(1+t^2)}$ qui est bien intégrable. On notera par ailleurs que F est impaire, il suffit donc de l'étudier pour $x \geq 0$,ce que l'on suppose dans la suite.

On a par ailleurs

$$|\sin(tx)| \leq |tx|$$

d'où

$$|F(x)| \leq \int_0^\infty \frac{|x|}{(1+t^2)}\,dt = |x|\frac{\pi}{2}.$$

c) On pose

$$\Delta_h F = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)$$

on veut montrer que $\Delta_h F \to 0$ quand $h \to 0$. On a

$$\Delta_h F = \int_0^\infty \frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)}{ht(1+t^2)}$$

On peut remarquer par un développement de Taylor que

$$\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx) = -t^2h^2/2\sin(\theta_{x,t})$$

pour $\theta_{x,t} \in (t(x+h), tx)$ et donc que

$$|\Delta_h F| \leq h/2\int_0^\infty \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

qui malheureusement diverge en ∞. Il faut donc couper en deux bouts : on a pour tout $A > 0$

$$I(A) = |\int_0^A \frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)}{ht(1+t^2)}| \leq h/2\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

mais par ailleurs, en remarquant que

$$|\sin(t(x+h)) - \sin(tx)| = |2\cos(tx + th/2)\sin(th/2)|$$

$$\begin{aligned}
II(A) &= \int_A^\infty \left|\frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)}{ht(1+t^2)}\right| \\
&\leq \int_A^\infty \left|\frac{th/2}{ht(1+t^2)}\right| dt + \int_A^\infty \left|\frac{1}{(1+t^2)}\right| dt \\
&= 2(\frac{\pi}{2} - \arctan(A)) = \arctan(1/A) \to 0, \text{ quand } A \to \infty
\end{aligned}$$

D' où pour tout $\varepsilon > 0$, il va exister $A > 0$ tel que

$$II(A) \leq \varepsilon/2.$$

Pour un tel A on a alors $I(A) \leq \varepsilon/2$ pour h suffisamment petit.

d) G est non seulement continue mais uniformément continue car elle est bornée par $\pi/2$. En effet on a

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt \\
&= \int_0^A \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt + \int_A^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt
\end{aligned}$$

et $|\int_A^\infty \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)} dt| \leq \arctan(1/A)$.La première partie est continue par définition de l'intégrale, bornée par $\pi/2$.

Si $G(.)$ est dérivable on peut s'attendre à ce que

$$G'(x) = \int_0^\infty -\frac{t\sin(tx)}{1+t^2} dt$$

Il suffit alors de remarquer que pour tout B (et en particulier lorsque $B \to \infty$) on a par le théorème de la moyenne,

$$\begin{aligned}
|\int_A^B -\frac{t\sin(tx)}{1+t^2} dt| &\leq \frac{A}{1+A^2} \int_A^C \sin(tx) dt \\
&\leq \frac{2A}{x(1+A^2)} \text{ pour } x \neq 0
\end{aligned}$$

On procède alors comme dans c) en découpant la différence entre les accroissements et la valeur supputée de la dérivée en deux bouts. Cela marche bien si $x \neq 0$.

e) On remarque que G est paire, bornée. Aussi, si $G'(0)$ existe, on a nécessairement $G'(0) = 0$. On a alors par changement de variable,

$$\frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(th)}{1+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(u)}{h^2 + u^2} du,$$

qui est décroissante en h. Comme sa limite vaut 0 en ∞, on aurait alors $\int_0^\infty \frac{1-\cos(u)}{h^2+u^2} du = 0$ pour tout $h > 0$ ce qui est impossible (prendre par exemple h=1). Donc G n'est pas dérivable en 0.

f) D'après ce qui précède pour $x > 0$, on a

$$F''(x) = \int_0^\infty \frac{-t\sin(tx)}{1+t^2} dt$$

soit en utilisant la décomposition

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t} dt + F''(x) \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt + F''(x) \\ &= \pi/2 + F^{''}(x). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour $x > 0$,

$$F(x) = \alpha \exp(x) + \beta \exp(-x) + \pi/2$$

Comme on sait $F(x) \leq \pi/2x$, il vient immédiatement $\alpha = 0$ (prendre la limite quand $x \to \infty$). Comme F est continue nulle en 0, on obtient

$$F(x) = \frac{\pi}{2}(1 - \exp(-x)),\ x > 0.$$

g) Un raisonnement similaire conduit pour $x < 0$ à

$$F(x) = -\frac{\pi}{2}(1 - \exp(x)),\ x < 0$$

On déduit de ces deux résultats que

$$G(x) = F^{'}(x) = \frac{\pi}{2} \exp(-|x|),$$

qui n'est effectivement pas dérivable en 0.

Problème

Préliminaire :

Si on note $I = \int_0^1 f(t)dt$ alors, d'après le théorème de la moyenne, il existe $a \in [0,1]$, $I = f(a) \in]0,1[$. On peut dès lors appliquer l'inégalité donnée en $c = I$ et au point $f(x) \in]0,1[$ et on obtient, pour tout $x \in [0,1]$

$$\phi'(I^+)(f(x) - I) + \phi(I)) \leq \phi(f(x))$$

soit en intégrant entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned} \phi'(I^+)(\int_0^1 f(x)dx - I) + \phi(I) \int_0^1 dx \leq \phi(\int_0^1 f(x)dx) \\ \iff \phi(I) \leq \phi(\int_0^1 f(x)dx), \end{aligned}$$

qui est le résultat cherché.

Première partie

a) Il suffit de prendre $f(x) = x$, alors $\int_0^1 xdx = 1/2$ et d'utiliser le résultat précédent :

$$\phi(1/2) = \phi(\int_0^1 xdx) \leq \int_0^1 \phi(t)dt.$$

b) Soit $f_q(x) = \frac{1}{(x+q+1)\sqrt{x+1/2}}$, infiniment dérivable sur $]-1/2, \infty[$.On a

$$f_q'(x) = -\frac{1}{(x+q+1)^2\sqrt{x+1/2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+q+1)(x+1/2)^{3/2}} < 0,$$

d'où par un calcul immédiat

$$f_q^{''}(x) > 0,$$

donc f_q est strictement convexe.

Mais, pour g convexe, on a simplement par translation du résultat a)

$$g(m) \leq \int_{m-1/2}^{m+1/2} g(t)dt, \text{ pour } m \geq 1.$$

Il suffit en effet de poser $f(x) = g(x + (m - 1/2))$, alors f est aussi convexe et l'inégalité a) s'écrit

$$\begin{aligned} f(1/2) = g(m) &\leq \int_0^1 g(x + (m - 1/2))dx \\ &= \int_{m-1/2}^{m+1/2} g(t)dt. \end{aligned}$$

En $m = 0$, il suffit de reprendre le a) lorsque l'intégral de f est faussement impropre en 0. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\phi'(I^+)(\int_\varepsilon^1 f(x)dx - I) + \phi(I)\int_\varepsilon^1 dx \leq \phi(\int_\varepsilon^1 f(x)dx) \text{ soit} \\ &\phi(I)(1-\varepsilon) + \phi'(I^+)(\int_\varepsilon^1 f(x)dx - I) \leq \phi(\int_\varepsilon^1 f(x)dx) \end{aligned}$$

et en faisant tendre ε vers 0, si $\int_{->0}^1 f(x)dx$ existe alors on a encore

$$\phi(1/2) \leq \phi(\int_0^1 f(x)dx)$$

et on peut appliquer le même argument que précédemment (translation).

c) On a donc

$$S_N(q) = \sum_{m=0}^{N} f_q(m).$$

On remarque $\int_{\to -1/2} f_q(x)dx$ est faussement impropre en -1/2. D'après b) et en remarquant que tous les termes de la somme sont positifs

$$0 < S_N(q) \leq \int_{-1/2}^{N+1/2} f_q(x)dx$$

On a alors par changement de variable $u = \sqrt{x + 1/2}$

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{N+1/2} f_q(x)dx &= \int_0^{\sqrt{N+1}} \frac{2}{u^2 + q + 1/2}du \\ &< \int_0^\infty \frac{2}{u^2 + q + 1/2}du \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{q + 1/2}}. \end{aligned}$$

Pour avoir un encadrement un peu plus précis que $[0, \frac{\pi}{\sqrt{q+1/2}}]$ etune borne inférieure non triviale, on peut, par exemple, conserver les premiers termes de la somme. On a par exemple

$$\frac{\sqrt{2}}{q+1} + \frac{\sqrt{2/3}}{q+2} < \lim_{N\to\infty}(S_N(q)) \leq \frac{\pi}{\sqrt{q + 1/2}}$$

Deuxième partie

a) A N fixe, F et G sont visiblement continues car composée de fonction continues...

Donc, par continuité de G, l'ensemble

$$\{a \in \mathbb{R}^{N=1},\ G(a) = \lambda\} = \{G^{-1}(\{\lambda\})\}$$

est compact car $\{\lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

b) Par continuité de F, F atteint forcément sont maximum sur un compact...

c) F et G étant également dérivable, le théorème des extrémas liés implique qu'il existe λ_0 tel que

$$\frac{\partial F(a^*)}{\partial a_i} = \lambda_0 \frac{\partial G(a^*)}{\partial a_i}.$$

(λ_0 s'interprète comme le multiplicateur de Lagrange associé au Lagrangien $L = F(a) - \lambda_0 G(a)$ et la condition précédente est simplement la condition au premier ordre du théorème de Kuhn et Tucker). En effet, on a clairement (pour pouvoir appliquer ce théorème) $G'(a^*) \neq 0$ car

$$\frac{\partial G(a^*)}{a_p} = 2a_p,$$

donc $G'(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$.

L'égalité $\frac{\partial F(a^*)}{\partial a_i} = \lambda \frac{\partial G(a^*)}{\partial a_i}$ s'exprime alors sous la forme

$$\sum_{m=0}^{N} \frac{a_m^*}{m+p+1} = 2\lambda_0 a_p^*.$$

On pose $\mu = 2\lambda_0$. On remarque alors que

$$\begin{aligned} M_\lambda &= \sum_{p=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \frac{a_p^* a_m^*}{m+p+1} = \mu \sum_{p=0}^{N} a_p^* a_p^*. \\ &= \mu G(a^*) = \mu\lambda. \end{aligned}$$

d) Evident.

e)Quitte à échanger les signes, on peut supposer que au moins un a_i^* est strictement positif. Comme indiqué, on considère q l'entier tel que

$$\sqrt{q+1/2}\,a_q^* = \max_{r=0,\dots,N} (\sqrt{r+1/2}\,a_r^*) \neq 0.$$

D'après c) on a

$$\begin{aligned} \mu a_q^* = \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m^*}{m+q+1} &\leq \sum_{m=1}^{N} \frac{a_m^* \sqrt{m+1/2}}{(m+q+1)\sqrt{m+1/2}} \\ &\leq \sqrt{q+1/2}\,a_q^* \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{(m+q+1)\sqrt{m+1/2}} \\ &\leq \sqrt{q+1/2}\,a_q^* \frac{\pi}{\sqrt{q+1/2}} = a_q^* \pi. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mu \leq \pi$.

f) En rassemblant tous les résultats on obtient donc que pour tout $a \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$F(a) \leq M_\lambda = \mu G(a) \leq \pi G(a)$$

soit l'inégalité de Hilbert.

AVRIL 2005

<u>**CONCOURS INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**</u>

ITS Voie B OPTION Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUE

Exercice 1

Préliminaire

Si $x \neq 0$, on a donc par hypothèse l'existence de $\lambda_x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda_x f(x)$. On veut montrer que $\lambda_x = \lambda$ est constant.

Posons $y = \alpha x$ alors $f(y) = \lambda_y y = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$

donc $\lambda_x = \lambda_y$, est constant sur chaque droite.

Soit maintenant$(x, y) \neq 0$, libre on a

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

comme(x, y) libre l'unicité de la décomposition implique $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Donc en appliquant ces deux résultats, pour tout $x \neq 0$, s'écrivant sur une base $e_1, ..., e_p$, $x = \sum_i^p \alpha_i e_i$

$$\lambda_x = \lambda_{\alpha_i e_i} = \lambda_{e_i} \text{ pour tout } i.$$

a) C'est un espace de dimension n^2 (car en bijection avec $\mathbb{R}^{n^2}$). La base canonique est formée des matrice $e_{ij} = [\delta_{kl}(i,j)]_{\substack{k=1,...,n \\ l=1,...,n}}$ avec

$$\delta_{kl}(i,j) = 0 \;\Leftrightarrow (k,l) = (i,j).$$

Soit C qui commute avec tout élément de $E = M_{n,n}(\mathbb{R})$ (on dit que C appartient au centre de E). Montrons que C est une homothétie. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que (x_0, Cx_0) est libre, donc il existe B projecteur sur l'espace engendré par Cx_0 tel que $BCx_0 = Cx_0$ et $Bx_0 = 0$. Mais on a alors aussi comme C commute avec B, $BCx_0 = CBx_0 = Cx_0 = 0$, ce qui implique que (x_0, Cx_0) n'est pas un système libre. Donc C est une homothétie de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ i.e. $C = \lambda I_E$.

b) La linéarité est classique et triviale. La trace prend ses valeur dans $\mathbb{R}$, c'est donc bien un élément de E^*. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, AB a pour terme générique sur sa diagonale $\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i}$ et pour trace

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,j} = tr(BA).$$

c) La linéarité est évidente. Comme $dimE = dimE^*$, il suffit de démontrer que $Ker\phi = \{0\}$. Pour cela soit A tel que $\phi_A = 0$ donc pour tout M en particulier pour tout élément $e_{i,j}$ de la base canonique de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ on a , $i, j = 1, ..., n$

$$tr(Ae_{i,j}) = 0$$

mais un calcul direct donne

$$tr(Ae_{i,j}) = a_{j,i} = 0$$

d'ou $A = 0$.

d) On remaque que pour tout $\lambda > 0$ $\lambda tr(.)$ convient. On va montrer que ce sont les seules fonctions linéaires qui vérifient cette propriétés.

Comme ψ est dans E^* d'après c) il existe une matrice C telle que

$$\psi = \phi_C$$

L'égalité $\psi(AB) = \psi(BA)$ implique donc que, pour tout B

$$tr(CAB) = tr(ABC) = tr(CAB)$$

donc $tr((CA - AC)B) = 0$ soit $CA - AC = 0$. Donc C commute avec tout élément de $E = M_{n,n}(\mathbb{R})$ et c'est une homothétie $C = \lambda I_E$. On peut donc conclure que ψ est de la forme $\psi = \phi_{\lambda I_E} = \lambda tr(.)$. Les seules applications linéaires vérifiant la propriété $\psi(AB) = \psi(BA)$ sont donc des multiples de la trace.

Exercice 2 (facile)

a) Le polynome caractéristique de M_n est

$$C_A(x) = x^2 - 2x + 1 + \alpha^2/n^2$$

de racines dans $\mathbb{C}$

$$\lambda_1 = 1 - i\alpha/n$$

$$\lambda_2 = 1 + i\alpha/n.$$

Ces deux racines qui sont les valeurs propres de M_n sont distinctes, non nulles, donc M_n est diagonalisable et inversible dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

La résolution du système

$$\begin{cases} x - \frac{\alpha}{n} y = (1 + i\alpha/n)x \\ \frac{\alpha}{n} x + y = (1 + i\alpha/n)y \end{cases}$$

conduit au vecteur propre associé à λ_1,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

et de manière similaire à

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

associé à λ_2.

On a donc pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

$$A = P^{-1} Diag(\lambda_i) P.$$

b) On sait que

$$\lim_{n \to \infty} (1 + i\alpha/n)^n = \exp(i\alpha).$$

Une démonstration simple est de considérer, le log complexe associé à exp,

$$\log((1 + i\alpha/n)^n) = n \log((1 + i\alpha/n)) \to i\alpha.$$

Sinon (si on ne le connais pas) on montre respectivement que le module tend vers 1 et que l'angle tend vers α... ce qui est aussi immédiat.

c) On a donc d'après a)

$$M_n^n = P^{-1}\begin{pmatrix} (1+\frac{i\alpha}{n})^n & 0 \\ 0 & (1-\frac{i\alpha}{n})^n \end{pmatrix} P$$
$$\to P^{-1}\begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Problème

Première partie

a) $\preceq$ est une relation d'ordre non total. En effet, pour tout U, V, W de $\mathcal{A}(E)$, on a

i) $U \preceq U$

ii) $U \preceq V$ et $V \preceq W \;\Rightarrow U \preceq W$ (*trivial*)

iii) Si $U \preceq V$ et $V \preceq U$ alors $U - V$ est dans $\mathcal{A}(E)$ et $<(U-V)x, x>= 0$ d'où $<(U-V)x, y>= 0$ pour tout x, y (appliquer la relation précédente en $x+y$). Donc $U - V = 0$.

$\preceq$ est donc une relation d'ordre.

Si $n = 1$, alors l'ordre $\preceq$ se réduit à l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ et il est donc total.

Si $n \geq 2$, il n'est pas total. Il suffit de donner un contrexemple pour $n = 2$. On prend pour cela dans une base $e_1,\ e_2$,

$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas comparables pour cette relation: en effet, pour $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $< x,(U-V)x >= x_1^2 - x_2^2$ n'est ni positive ni négative. Pour n supérieur on peut prendre le même exemple en complètant les matrices avec des zéros partout ailleurs.

b) On remarque d'abord que BUB^* BVB^* sont bien dans $\mathcal{A}(E)$, lorsque U et V le sont. Mais on a

$$< x,(BVB^* - BUB^*x >=< x, B(V-U)B^*x >$$
$$=< B^*x,(V-U)B^*x >\geq 0,\ \text{car } U \preceq V.$$

donc $BUB^* \preceq BVB^*$.

c) Soit λ une valeur propre de V de vecteur propre associé x_0 alors on a

$$0 \leq < x_0, Vx_0 >= \lambda||x_0||^2$$

comme $x_0 \neq 0$, cela implique $\lambda \geq 0$.

La réciproque est évidente il suffit d'écrire dans une base orthonormée de valeur propre $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$ et

$$< x, Vx >= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

d) Dans une base orthonormée de v.p. comme précédemment, on pose

$$C = diag(\sqrt{\lambda_i})_{1\leq i\leq n}$$

de sorte que $< x, Cx >= \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}x_i^2$, que ce qui est légitime puisque toutes les valeurs propres de V sont positives. Alors on a évidemment $V = C^2$.

e) On note dans la suite $vect(\mu, A)$ l'espace propre associé à la valeur propre μ de la matrice A. On note tout d'abord que si $x \in vect(\sqrt{\lambda}, C)$ alors

$$Vx = C^2x = C\sqrt{\lambda}x = \sqrt{\lambda}Cx = \lambda x$$

donc $x \in vect(\lambda, V)$. Ceci montre

$$vect(\sqrt{\lambda}, C) \subset vect(\lambda, V)$$

Inversement, soient $\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_p}$ les p valeurs propres distinctes (positives de C). V et C étant diagonalisable (par construction) on a

$$E = \underset{i=1,\ldots,p}{\oplus} Vect(\sqrt{\lambda_i}, C) = \underset{i=1,\ldots,p}{\oplus} Vect(\lambda_i, V)$$

comme on a l'inclusion

$$vect(\sqrt{\lambda_i}, C) \subset vect(\lambda_i, V),\ i = 1, ..., p,$$

on a alors nécessairement l'égalité (prendre une base...).

Pour l'unicité, si C_1 et C_2 conviennent alors pour tout $x \in Vect(\lambda_i, V),\ i = 1, ..n$

$$(C_1 - C_2)x = \sqrt{\lambda_i}x - \sqrt{\lambda_i}x = 0$$

donc C_1 et C_2 coincident sur tous les sous espace propres (dont la somme vaut E) donc sur E.

f) V inversible $\Longrightarrow$ toutes les vp. de V sont strictement positives donc a fortiori celles de $V^{1/2}$ qui est donc inversible. Inversement si $(V^{1/2})^{-1}$ existe alors $V(V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1} = (V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1}V = I$ et donc $V^{-1} = (V^{1/2})^{-1}(V^{1/2})^{-1}$. Donc par unicité de la racine carré

$$(V^{-1})^{1/2} = (V^{1/2})^{-1}.$$

Deuxième partie

a) On peut toujours supposer quitte à renormaliser les u_i que ceux-ci forment une base orthonormée. On peut s'attendre à ce que $M_p = \lambda_{i_1}$ la plus grande valeur propre associée et $m_p = \lambda_{i_p}$, la plus petite parmi les indices choisis.

Si $x \in F_p \backslash \{0\},\ x = \sum_{j=1}^{p} x_{i_j} u_{i_j}$ on a

$$< x, V(x) >= \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i_j} x_{i_j}^2$$

$$\leq \lambda_{i_1} \sum_{i=1}^{p} x_{i_j}^2 = \lambda_{i_1} < x, x >$$

donc $M_p \leq \lambda_{i_1}$. mais pour $x = u_{i_1}$ on a $< x, V(x) > / < x, x >= \lambda_{i_1}$ d'où

$$M_p = \lambda_{i_1}.$$

La démonstration est similaire (borne inf au lieu de sup) pour m_p.

b)D'après ce qui precède on a immédiatement

$$M_{V,p} = \lambda_p$$

$$m_{U,p} = \mu_p.$$

c) On a $\dim(F_{n-p+1}^V) = n-p+1$ et $\dim(F_p^U) = p$ donc forcément $F_{n-p+1}^V \cap F_p^U \neq \{0\}$ (sinon on aurait $\dim(F_{n-p+1}^V) + \dim(F_p^U) \leq n$).

Soit donc $x_0 \neq 0$ dans $F_{n-p+1}^V \cap F_p^U$ on a alors

$$\mu_p \leq \frac{< x_0, Ux_0 >}{< x_0, x_0 >} \leq \frac{< x_0, V x_0 >}{< x_0, x_0 >} \leq \lambda_p$$

la deuxième inégalité provenant du fait que $U \preceq V$ et les autres du b). Ceci est vrai pour tout p, ce qui entraine que

$$sp(U) \leq sp(V)$$

d) On vérifie que $Sp(U) = \{1, 0\}$, $Sp(V) = \{1, 0\}$ donc $Sp(U) \leq Sp(V)$. Mais on a dans une base (e_1, e_2), $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$,

$$< x, U(x) >= x_1^2$$
$$< x, V(x) >= \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$$

et $x_1^2 \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$ n'est pas toujours vraie : (prendre $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$).

e) Comme A est orthogonale, on a $sp(AUA^*) = sp(U)$ donc d'après c),

$V \succeq AUA^* \Longrightarrow sp(U) \leq sp(V)$.

La réciproque est moins évidente.

On se place dans une base orthonormée $(u_1, u_2, ...u_n)$ de vecteurs propres de V associé à $sp(V)$ et on considère W définit par

$$Wu_i = \mu_i u_i$$

(où les μ_i sont valeurs de $sp(U)$). On a bien évidemment $sp(U) = sp(W)$. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$

$$< x, Vx >= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2 =< x, Wx >$$

soit

$$V \geq W$$

Mais comme S et U sont similaires , il exite une transformation orthogonale (simplement un changement de base) tel que $W = AUA^*$ et le résultat est démontré.