AVRIL 2004

CONCOURS INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B OPTION Mathématiques

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUE

Exercice 1

1) $f(t)$ est continûment infiniment différentiable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Comme $sin(t) = t + O(t^2)$ pour $t \to 0$, $f(t)$ peut se prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Ainsi définie $f(t)$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f^{(1)}(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2},\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$f^{(1)}(0) = 0$$

$f(t)$ est paire donc il suffit de l'étudier sur$[0, 2\pi]$. Sur $[0, 2\pi],\ t\cos(t)-\sin(t)$ s'annule pour $t = 0$ et de façon unique sur $]0, 2\pi]$ en $t_0 \neq 0$ tel que $\tan(t_0) = t_0$ ($t_0 \simeq 4.49$) d'où le tableau de variation

t	-2π		$-t_0$		0		t_0		2π
$f^{(1)}(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	$\cos(t_0)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\cos(t_0)$	$\nearrow$	0

avec $\cos(t_0) \simeq -0.22$.

2) a) D'après ce qui précède l'intégrale est faussement impropre en 0. Par ailleurs on a clairement $|\frac{\sin(t)}{t}| \leq 1$ d'où

$$|g(x)| = |\int_x^{x^2} f(t)dt| \leq x^2 + |x| \ \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

On en déduit immédiatement la continuité et la différentiabilité de g sur $\mathbb{R}$.

b) On a par intégration par partie ($u(t) = \frac{1}{t}$ et $v^{(1)}(t) = \sin(t),\ x$ étant supposé strictement positif tous les termes sont bien définis)

$$\int_x^{x^2} \frac{\sin(t)}{t}dt = [-\cos(t)/t]_x^{x^2} - \int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
|\int_x^{x^2} \frac{\sin(t)}{t}dt| &\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + |\int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{t^2}|dt \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + |h(x)| \\
&\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \int_x^{x^2} \frac{|\cos(t)|}{t^2}dt \\
&\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \int_x^{x^2} \frac{1}{t^2}dt \\
&= \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

On en conclue que $lim_{x\to\infty}(g(x)) = 0$.

c) Par composition, la dérivée de $g(x)$ vaut

$$g^{(1)}(x) = 2x\frac{\sin(x^2)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}(2\sin(x^2) - \sin(x)).$$

Pour $x \to 0$, on a $g^{(1)}(x) \to -1$ et $g^{(1)}$ se prolonge par continuité en 0.

Exercice 2

a) On a par un développement limité élémentaire pour u petit positif

$$\tan(u) \leq u + u^3$$

d'où le résultat.

b) On a

$$\phi^{(1)}(x) = \tan(x)^2 \geq 0$$

et $\phi^{(1)}(x) = 0$ seulement en $x = 0$. On en déduit que ϕ est continue, strictement croissante de $]-\pi/2, -\pi/2[$ dans $]-\infty, \infty[$. Comme $\lim_{x\to\pi/2}(\phi(x)) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\pi/2}(\phi(x)) = -\infty$, ϕ est bijective d'où l'existence de $\psi(x) = \phi^{-1}(x)$, qui de plus est continue.

c) On remarque que ϕ est impaire donc ψ est impaire. Par ailleurs ψ est croissante nulle en 0. On en déduit que

$$u_n = (-1)^n\psi(\frac{1}{n})$$

où $\psi(\frac{1}{n})$ est une suite décroissante vers 0. Par continuité de ψ, nulle en 0, u_n et v_n convergent vers 0.

d) D'après c) et le théorème sur les suites alternées, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente.

D'après a) on a

$$\phi(x) \leq x^3$$

Donc par croissance de ψ,

$$x \leq \psi(x^3)$$

On en déduit que

$$v_n \geq \frac{1}{n}$$

donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ est divergente.

e) Un contre-exemple montrant qu'il ne faut pas permuter les sommes doubles!!!

Pour $n \geq 1$ fixe on a d'après les résultats classiques sur les séries géométriques

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} &= \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^m - \frac{1}{n+2} \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n+2})^m \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{n}{n+1} \frac{1}{1-\frac{n}{n+1}} - \frac{1}{n+2} \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{1-\frac{n+1}{n+2}} \\
&= \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $N > 0$

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{N+1}{N+2}$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$ est convergente et vaut $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

Maintenant, à m fixe on a pour tout $N > 0$,

$$\sum_{n=1}^{N} u_{n,m} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^m - \frac{1}{N+2} (\frac{N+1}{N+2})^m$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m} = \frac{1}{2^{m+1}}$$

On en déduit toujours en utilisant les propriétés des suites géométriques

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = \frac{1}{2}.$$

Problème

Préliminaire :

L'inégalité est clairement vraie pour $n = 0$!

Maintenant supposons qu'elle est vraie pour n, on a

$$\begin{aligned}|\sin((n+1)t)| &\leq |\sin(nt)||\cos(t)| + |\sin(t)||\cos(nt| \\ &\leq |\sin(nt)| + |\sin(t)|\end{aligned}$$

soit en utilisant la relation pour n,

$$|\sin((n+1)t)| \leq n|\sin(t)| + |\sin(t)| = (n+1)|\sin(t)|.$$

On note également que l'inégalité est stricte pour $n \geq 2$ et pour $t \in]0, \pi/2[$.

Pour $x = \frac{\pi}{2n}$ on obtient

$$1 = |\sin(n\frac{\pi}{2n})| \leq n|\sin(\frac{\pi}{2n})| = n\sin(\frac{\pi}{2n})$$

d'où l'inégalité

$$\sin(\frac{\pi}{2n}) \geq \frac{1}{n}.$$

Première partie

1) a) On a de façon évidente sur $[-1, 1]$

$$\begin{aligned}&T_0(x) = \cos(0) = 1 \text{ et} \\ &T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x.\end{aligned}$$

b) Posons $t = arccos(x)$ alors $x = cos(t)$.

On a alors

$$\begin{aligned}T_{n+2}(x) + T_n(x) &= \cos((n+2)t) + \cos(nt) \\ &= 2\cos((n+1)t)\cos(t) \\ &= 2xT_{n+1}(x)\end{aligned}$$

et la relation de récurrence

$$(I) \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

s'ensuit.

c) On en déduit immédiatement par récurrence que T_n est dans P_n. De même, soit l'hypothèse $H(n)$: T_n est un polynôme de degré n ayant pour coefficient dominant 2^{n-1}.

On a clairement $H(1)$. Par ailleurs en utilisant (I), $T_2(x) = 2x^2 - 1$ donc $H(2)$ est vérifiée, supposant $H(n)$ *et* $H(n+1)$, on déduit de la relation de récurrence (I) , que T_{n+2} est un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant $2.2^{n-1} = 2^n$.

d) On a par un calcul immédiat

$T_0(x) = 1$	
$T_1(x) = x$	$U_0(x) = 1$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$U_1(x) = 2x$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$U_2(x) = 4x^2 - 1$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$U_3(x) = 8x^3 - 4x$
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

.

2) Par définition, les 0 de T_n sont les solutions de

$$n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} (\pi)$$

pour x dans $[0, 1]$. On vérifie aisément que, pour $k = 0, ..., n-1$,

$$\alpha_{k,n} \in [0, 1] \text{ et } T_n(\alpha_{k,n}) = 0.$$

Comme cos est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, on a également

$$\alpha_{0,n} < \alpha_{1,n} < \alpha_{2,n} < ... < \alpha_{n-1,n}$$

donc les $\alpha_{k,n}, \quad k = 0, ..., n-1$ sont n racines distinctes du polynôme T_n. Comme T_n est de degré n, ce sont les seules possibles.

3) D'après 1) T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ donc U_n qui est sa dérivée à une constante près est un polynôme de degré n. Son coefficient est donc

$$(n+1)2^n/(n+1) = 2^n.$$

Par ailleurs, on a

$$T_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t)$$

d'où

$$-\sin(t) T_{n+1}^{(1)}(\cos(t)) = -(n+1)\sin((n+1)t)$$

et

$$U_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)},$$

pour $t \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$.

4) Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$T_n^{(1)}(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos(x))$$

donc

$$\sqrt{1-x^2}\, T_n^{(1)}(x) = n \sin(n \arccos(x)),$$

soit par dérivation

$$\sqrt{1-x^2}\, T_n^{(2)}(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} T_n^{(1)}(x) = -\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} \cos(n \arccos(x))$$

et donc

$$(1-x^2) T_n^{(2)}(x) - x T_n^{(1)}(x) = -n^2 T_n(x).$$

Comme T_n est un polynôme , il est infiniment continûment différentiable donc cette relation est aussi valide sur $[-1, 1]$.

L'équation différentielle en U_n se déduit simplement par différentiation de cette relation : on obtient

$$(1-x^2) U_n^{(2)}(x) - 3x U_n^{(1)}(x) + n(n+2) U_n(x) = 0.$$

5) Comme $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable en -1 et 1, toutes les intégrales sont faussement impropres. Plus précisément pour $k \in \mathbb{N}, \; l \in \mathbb{N}$ et $-1 < \alpha < \beta < 1$, posons

$$I_{k,l}(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_l(x) dx.$$

On a par changement de variable,

$$I_{k,l}(\alpha, \beta) = \int_{\arccos(\alpha)}^{\arccos(\beta)} \cos(kt) \cos(lt) dt$$

donc $I_{k,l} = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\pi}} I_{k,l}(\alpha,\beta)$ est parfaitement définie et vaut

$$I_{k,l} = \int_0^\pi \cos(kt)\cos(lt)dt.$$

Si $k \neq l$, on a aussi $k+l>0$ et donc

$$I_{k,l} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((k+l)t)dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((k-l)t)dt = 0.$$

Maintenant pour $k = l \neq 0$, on a

$$I_{k,k} = \int_0^\pi \cos(kt)^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2kt))dt = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin

$$I_{0,0} = \pi.$$

On en déduit que tous les polynômes sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

6) Si, l'on pose

$$E_0(x) = \frac{T_0(x)}{\pi}$$

et

$$E_k(x) = 2\frac{T_k(x)}{\pi},\ k = 1, ..., n,$$

$(E_0, E_1, ...E_n)$ est alors une base orthonormée de P_n^0 pour $< .,. >_M$.

Deuxième partie

1) Par définition, on a pour tout n,

$$|T_n(x)| \leq 1$$

et $T_n(1) = 1$ donc $||T_n|| = 1$. Pour $n \geq 1$, cette valeur est atteinte ssi

$$n\arccos(x) \in \pi\mathbb{Z} \cap [0, n\pi] \iff arc\cos(x) \in \{0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, ..., \pi\}$$
$$\iff x \in \{1, \cos(\frac{\pi}{n}), ..., \cos(\frac{k\pi}{n}), ..., -1\}$$

D'après 3) on a

$$U_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}$$

donc en utilisant le préliminaire

$$||U_n|| \leq (n+1)$$

et on note que $|U_n(1)| = |U_n(-1)| = (n+1)$ donc

$$||U_n|| = (n+1).$$

En utilisant la remarque que l'inégalité du préliminaire est stricte en dehors des point terminaux, on en déduit que les seuls points atteignant le maximum sont $\{-1, 1\}$.

2) Comme suggérer dans l'énoncé, considérons $log(T_n(x))$. D'après la partie précédente T_n est un polynôme de degré n de racine $\alpha_{k,n},\ k = 0, ..., n-1$, d'où à un constante C près, en prenant le log complexe,

$$\log(T_n(x)) = C + \sum_{k=0}^{n-1} \log(x - \alpha_{k,n})$$

et par dérivation

$$\frac{T_n^{(1)}(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - \alpha_{k,n}}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}} = nU_{n-1}.$$

Cette égalité est vrai pour tout $x \in [-1, 1]$ par prolongement par continuité aux points $\alpha_{k,n}$. On en déduit

$$|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x - \alpha_{k,n}}| \leq n||U_{n-1}|| = n^2.$$

3) On a par un résultat classique l'expression suivante du polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre k

$$L_{k,n-1}(x) = \frac{\Pi_{j\neq k}(x - \alpha_{j,n})}{\Pi_{j\neq k}(\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n})}.$$

On vérifie directement que $L_{k,n-1}$ est un polynôme de degré $n-1$, et est tel que $L_{k,n-1}(\alpha_{k,n}) = \frac{\Pi_{j\neq k}(\alpha_{k,n}-\alpha_{j,n})}{\Pi_{j\neq k}(\alpha_{k,n}-\alpha_{j,n})} = 1$ et $L_{k,n-1}(\alpha_{j,n}) = 0,\ j \neq k$.

D'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 2^n \Pi_{j=1}^n (x - \alpha_{j,n}) \\ &= (x - \alpha_{k,n}) 2^n \frac{\Pi_{j\neq k}(x - \alpha_{j,n})}{\Pi_{j\neq k}(\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n})} \Pi_{j\neq k}(\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n}), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{T_n(x)}{(x - \alpha_{k,n})} = 2^n \Pi_{j\neq k}(\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n}) L_{k,n-1}(x),$$

soit en posant $\lambda_{k,n} = 2^n \Pi_{j\neq k}(\alpha_{k,n} - \alpha_{j,n})$

$$\frac{T_n(x)}{(x - \alpha_{k,n})} = \lambda_{k,n} L_{k,n-1}(x),$$

soit $\frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})}$ est proportionnel au polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre k.

4)L'égalité précédente donne

$$T_n(x) = \lambda_{k,n}(x - \alpha_{k,n}) L_{k,n-1}(x)$$

soit par dérivation

$$T_n^{(1)}(x) = \lambda_{k,n} L_{k,n-1}(x) + \lambda(x - \alpha_{k,n}) L_{k,n-1}^{(1)}(x)$$

donc

$$\begin{aligned} T_n^{(1)}(\alpha_{k,n}) &= \lambda_{k,n} L_{k,n-1}(\alpha_{k,n}) + 0 \\ &= \lambda_{k,n} \end{aligned}$$

ce qui prouve la première égalité.

Par ailleurs par définition de T_n

$$T_n^{(1)}(\cos(x))\sin(x) = n\sin(nx),$$

soit d'après I.2 pour $\alpha_{k,n} = \cos(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi)$ (en posant $x = \frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi)$,

$$\begin{aligned} & T_n^{(1)}(\alpha_{k,n})\sin(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi) \\ &= n\sin(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi) = n(-1)^{k-n+1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs comme $\sin(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi)^2 + \cos(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi)^2 = 1$ et $\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi \in [0,\pi]$ on a

$$\sin(\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} + (n-1-k)\pi) = \sqrt{1-\alpha_{k,n}^2}$$

et on en déduit

$$T_n^{(1)}(\alpha_{k,n}) = \frac{n(-1)^{k-n+1}}{\sqrt{1-\alpha_{k,n}^2}}.$$

5) Soit P une polynôme dans $P_{n-1}^{0.}$. D'après 3) il se décompose dans la base des polynômes d'interpolation de Lagrange sous la forme,

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j L_{j,n-1}(x),$$

avec $P(\alpha_{k,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_j L_{j,n-1}(\alpha_{k,n}) = a_k$.

On déduit de 3) que

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} P(\alpha_{k,n})\lambda_{k,n}^{-1}\frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})}$$

avec en utilisant les égalités du 4)

$$\lambda_{k,n} = \frac{n(-1)^{k-n+1}}{\sqrt{1-\alpha_{k,n}^2}}.$$

d'où la décomposition

$$P(x) = n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{k-n+1}P(\alpha_{k,n})\sqrt{1-\alpha_{k,n}^2}\frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})}.$$

6) En utilisant l'égalité du 5) on a pour $x \in [-1,1]$,

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})}\right|.$$

On ne peut directement utiliser l'inégalité 2) à cause de la valeur absolue à l'intérieure de la somme.

Il suffit cependant de remarquer que si $x \in]\alpha_{n-1,n}, 1]$ alors $\frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})} \geq 0$ (car alors $x \geq \cos(\frac{\pi}{2n})$) donc

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})} \leq \frac{1}{n} n^2 = n,$$

d'après l'inégalité 2).

De même pour $x \in [-1,\ \alpha_{0,n}]$ on a également $\frac{T_n(x)}{(x-\alpha_{k,n})} \geq 0$ et la même inégalité s'ensuit.

Enfin pour $x \in [\alpha_{0,n}, \alpha_{n-1,n}]$ on a par définition de $\alpha_{0,n}, \alpha_{n-1,n}$,

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sin(\frac{\pi}{2n}),$$

soit en utilisant l'inégalité du préliminaire

$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{\pi}{2n}\frac{2}{\pi} = \frac{1}{n},$$

donc par hypothèse sur P

$$|P(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq n.$$

D'où l'inégalité voulue en recollant les intervalles.

AVRIL 2004

CONCOURS INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B OPTION Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUE

Problème 1

Préliminaire :

$< .,. >_D$ est clairement bilinéaire symétrique. Comme D est définie positive toutes ses valeurs propres sont positives et donc

$$||Y||_D = < Y, Y >_D \geq 0,$$

nulle ssi $Y = 0$. L'inégalité est une conséquence directe de Cauchy-Schwartz. On peut la vérifier en posant $D = diag(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$. Si on pose $Y = (y_1, ..., y_n)^*$ et $Z = (z_1, ..., z_n)^*$ l'inégalité devient

$$< Y, Z >_D = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i z_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} y_i)(\sqrt{\lambda_i} z_i)\right)$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} y_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} z_i)^2\right)^{1/2} = \|Y\|_D \|Z\|_D$$

par Cauchy-Schwarz.

1) a) Soit A et B dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Z = AX$, il suffit de prouver

$$Y^*BZ\ Z^*BY \leq (Z^*BZ)(Y^*BY).$$

On notera que les deux membres de cette inégalité sont réels.

B, étant dans $SDP_n(\mathbb{R})$, est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, de valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ strictement positive. On pose $D = diag(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$. Il existe donc O dans $O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales tel que

$$B = O^*DO$$

Si l'on pose $Z_1 = OZ$ et $Y_1 = OY$ il suffit donc de montrer que

$$(Y_1^*DZ_1)^2 \leq (Z_1^*DZ_1)(Y_1^*DY_1),$$

qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz du préliminaire pour le produit scalaire $< Y_1, Z_1 >_D = Y_1^*DZ_1$.

b) On note que X^*AX et X^*ABAX sont réels et que les matrices XX^* et $BAXX^*AB$ sont des matrices symétriques de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ donc C est une matrice symétrique. Pour montrer que C est définie positive, il suffit de montrer que pour $Y \neq 0$, $Y^*CY > 0$. D'après a) on a

$$(1) \qquad (Y^*BAXX^*ABY) \leq (X^*ABAX)(Y^*BY)$$

donc

$$\begin{aligned}
Y^*BY + \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} - \frac{Y^*BAXX^*ABY}{X^*ABAX} &\geq Y^*BY + \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} - Y^*BY^* \\
&= \frac{Y^*XX^*Y}{X^*AX} \geq 0.
\end{aligned}$$

C est donc positive. L'égalité à 0 impose l'égalité dans (1) ainsi que $Y^*XX^*Y = 0$ donc d'après ce qui précède que $0 = (Z_1^*DZ_1)(Y_1^*DY_1)$. Comme D est définie positive, on a $||Z_1||_D > 0$ et donc nécessairement $(Y_1^*DY_1) = 0$ d'où $Y_1^* = 0$ et donc A étant définie positive (donc étant inversible) $Y = 0$. C est donc définie positive.

2) En utilisant le résultat précédent, on obtient immédiatement par récurrence que chaque H_{k+1} est dans $SDP_n(\mathbb{R})$ et $X_k \neq 0$.

On pose $H(k)$:$\forall\ j \in \{0, ..., k\}$, $H_{k+1}AX_j = X_j$ et $X_{k+1}^*AX_j = 0$.

On vérifie d'abord $H(0)$ qui se ramène à $H_1AX_0 = X_0$ et $X_1^*AX_0$.

Or on a par définition avec $H_0 = I_n$

$$\begin{aligned}
H_1AX_0 &= (I_n + \frac{X_0X_0^*}{X_0^*AX_0} - \frac{AX_0X_0^*A}{X_0^*AAX_0})AX_0 \\
&= AX_0 + X_0\frac{X_0^*AX_0}{X_0^*AX_0} - \frac{AX_0X_0^*AAX_0}{X_0^*AAX_0} \\
&= AX_0 + X_0 - AX_0 = X_0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs $X_1^*AX_0 = 0$ signifie $Y_1^*H_1AX_0 = 0 \iff Y_1^*X_0 = 0$ (d'après l'égalité précédente) et donc comme c'est un scalaire

$$X_0^*Y_1 = 0.$$

Supposons maintenant que $H(k-1)$ est vérifiée et montrons $H(k)$.

Tout d'abord en raisonnant comme pour $H(0)$ on a, en utilisant la récurrence,

$$\begin{aligned}
H_{k+1}AX_j &= (H_k + \frac{X_jX_j^*}{X_j^*AX_j} - \frac{H_kAX_jX_j^*A}{X_j^*AAX_j})AX_j \\
&= H_kAX_j + X_j - AX_j \\
&= X_j
\end{aligned}$$

pour tout $0 \leq j \leq k-1$. Pour $j = k$, on a aussi cette identité directement.

Il suffit donc de montrer maintenant que $X_{k+1}^*AX_j = 0$. Mais on a

$$X_{k+1}^*AX_j = Y_{k+1}^*(H_{k+1}AX_j) = Y_{k+1}^*X_j = 0$$

par définition de Y_{k+1}, d'où $H(k)$.

3) Pour tout $(j,k) \in \{0, ..., n-1\}^2,\ j \neq k,$ 2) implique que $X_k^*AX_j = 0$, soit, A étant définie positive, les vecteurs $X_k^*,\ k = 0, ..., n-1$ sont deux à deux orthogonaux pour le produits scalaires $<,>_A$. Comme ils sont non nuls et au nombre de n, ils forment donc une base orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Donc, tout X dans $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique

$$X = \sum_{j=0}^{n-1} a_jX_j.$$

On a alors en utilisant la relation $H_nAX_j = X_j,\ j = 1, ..., n-1$

$$H_nAX = \sum_{j=1}^{n-1} a_j H_nAX_j = \sum_{i=1}^{n-1} a_j X_j = X$$

donc

$$H_nA = I_n$$

A étant définie positive, ceci implique que $H_n = A^{-1}$.

Problème 2

1) $M_{n,n}(\mathbb{C})$ est bien un espace vectoriel...

On a clairement la linéarité en A et l'antilinéarité en B. Pour$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ A, B,\ C$ dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
&< \lambda A + \mu C, B >= tr((\lambda A + \mu C)B^*) \\
&= \lambda tr(AB^*) + \mu tr(CB^*) = \lambda < A, B > + \mu < C, B >
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&< A, \lambda B + \mu C >= tr(A(\lambda B + \mu C)^*) \\
&= tr(A(\overline{\lambda} B^* + \overline{\mu} C^*) = \overline{\lambda} tr(AB^*) + \overline{\mu} tr(A, C^*) \\
&= \overline{\lambda} < A, B > + \overline{\mu} < A, C > .
\end{aligned}$$

Donc $< .,. >$ est sesquilinéaire et l'on a

$$\begin{aligned}
&< A, B >= tr(AB^*) = tr((BA^*)^*) \\
&= \overline{tr(BA^*)} = \overline{< B, A >},
\end{aligned}$$

donc $< .,. >$ est une forme hermitienne sur $M_{n,n}(\mathbb{C})$. Et comme pour tout $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$\begin{aligned}
&< A, A^* >= tr(AA^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \overline{a_{i,j}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \ \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

c'est un produit scalaire hermitien.

Soit la matrice $E_{i,j} = (\delta_{k,l})_{\substack{k=1,\dots,n \\ l=1,\dots,n}}$ avec $\delta_{k,l} = 0$ si $1 \leq (k,l) \neq (i,j)$ et $\delta_{k,l} = 1$ si $(k,l) = (i,j)$. Les matrices $(E_{i,j})$ pour $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n$ sont au nombre de n^2.

On a par ailleurs

$$\begin{aligned}
&< E_{i,j}, E_{l,m} >= 0 \text{ si } (i,j) \neq (l,m) \\
&< E_{i,j}, E_{i,j} >= \delta_{i,j}^2 = 1
\end{aligned}$$

donc les $(E_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ forment une base orthonormée de $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

2) C'est évident car pour tout A, B dans $M_{n,n}(\mathbb{C}),\ tr(AB) = tr(BA)$.

On a donc directement

$$\begin{aligned}||UA||^2 &= tr(UAA^*U^*) = tr(AA^*UU^*)\\ &= tr(AA^*) = ||A||^2,\end{aligned}$$

$$||AU||^2 = tr(AUU^*A) = tr(AA^*) = ||A||^2.$$

3) Posons $A = diag(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$. On a alors

$$AB-BA = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1-\lambda_2)b_{1,2} & (\lambda_1-\lambda_3)b_{1,3} & & (\lambda_1-\lambda_n)b_{1,n}\\ (\lambda_2-\lambda_1)b_{2,1} & 0 & (\lambda_2-\lambda_3)b_{2,3} & & (\lambda_2-\lambda_n)b_{1,2}\\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ (\lambda_n-\lambda_1)b_{n,1} & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$||AB-BA||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |\lambda_i-\lambda_j|^2|b_{i,j}|^2.$$

On a par ailleurs

$$||A||^2 = \sum_{i=}^{n} |\lambda_i|^2 \ et ||B||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{i,j}|^2.$$

On déduit de l'inégalité $|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$,

$$\begin{aligned}||AB-BA||^2 &\leq 2\sum_{i,j=1}^{n} (|\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2)|b_{i,j}|^2\\ &\leq 2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\right)|b_{i,j}|^2\\ &= 2\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\right)\sum_{i,j=1}^{n}|b_{i,j}|^2\\ &= 2||A||^2||B||^2\end{aligned}$$

d'où l'inégalité de l'énoncé, lorsque A est diagonale.

Maintenant, si A est une matrice quelconque de $M_{n,n}(\mathbb{C})$, les théorèmes de réductions assurent l'existence d'une matrice unitaire U tel que $A = UDU^*$ avec D diagonale.

On en déduit que

$$\begin{aligned}||AB-BA|| &= ||UDU^*B - BUDU^*||\\ &= ||U(DU^*BU - U^*BUD)U^*||\end{aligned}$$

soit en utilisant 2)

$$||AB-BA|| = ||DU^*BU - U^*BUD||.$$

Si on pose $B_U = U^*BU$, on a en appliquant l'inégalité du 3,

$$||AB-BA|| \leq \sqrt{2}||D||\ ||B_U||$$

et il suffit de remarquer $||B_U|| = ||B||$ et $||A|| = ||D||$ (en appliquant 2)).

4) Par récurrence, chaque B_k est un produit de matrices unitaires donc inversible : la suite est donc bien définie.

Maintenant on a

$$\begin{aligned}||I - B_{k+1}|| &= ||I - AB_kA^{-1}B_k^{-1}|| \\ &= ||A^{-1}(AB_k - B_kA^{-1})B_k^{-1}|| \\ &= ||AB_k - B_kA|| \leq \sqrt{2}||A||\ ||B_k|| = \sqrt{2}||B_k||\end{aligned}$$

Mais on peut aussi écrire $AB_k - B_kA = (I-A)(I-B_k) - (I-B_k)(I-A)$ de sorte que l'on a également

$$\begin{aligned}||I - B_{k+1}|| &= ||(I-A)(I-B_k) - (I-B_k)(I-A)|| \\ &\leq \sqrt{2}||I-A||\ ||I-B_k||,,\end{aligned}$$

ce qui est plus intéressant pour l'étude de la suite. En effet, comme $\sqrt{2}||I-A|| < 1$, on en déduit que la suite des $||I - B_{k+1}||$ décroît vers 0. Plus précisément si on pose $a = \sqrt{2}||I-A|| < 1$ on a

$$||I - B_{k+1}|| \leq a^{k+1}||I - B||$$

et le théorème de d'Alembert implique que $lim_{k\to\infty}||I - B_{k+1}|| = 0$ donc

$$lim_{k\to\infty}B_{k+1} = I.$$

Si A et B engendrent un sous-groupe fini de $U_n(C)$, alors les B_k sont dans ce sous-groupe fini et ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs donc la suite des B_k stationne et vaut I au bout d'un nombre fixe d'itérations.

5) On a

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ & \backslash & 0 \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ & \backslash & 0 \\ 0 & & b_n \end{pmatrix},$$

donc les $\{a_i\}$ *et* les $\{b_j\}$ sont simultanément les valeurs propres de A donc il existe σ une permutation de permettant de passer des $\{a_i\}$ aux $\{b_j\}$, c'est à dire il existe telle que $b_i = a_{\sigma(i)}$. On pose P la matrice associée à cette permutation : tous ses coefficients sont dans $\{0,1\}$. Plus précisément cette matrice est donnée par

$$P = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}},$$

où $\delta_{k,l} = 0$ si $k \neq l$ et $\delta_{k,l} = 1$ si $k = l$. On a évidemment $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc P est dans $U_n(\mathbb{C})$. Il suffit maintenant de vérifier que $P^{-1}AP = BAB^{-1}$.

La matrice $P^{-1}AP = [c_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est donnée par

$$c_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)}a_{k,l}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{\sigma(i),\sigma(j)}$$

donc

$$\begin{aligned}c_{i,j} &= 0 \text{ si } i \neq j \\ c_{i,i} &= a_{\sigma(i),\sigma(i)} = a_{\sigma(i)} \text{ pour } i = j.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

6) On remarque simplement que

$$AC^{-1} - C^{-1}A = C^{-1}(CA - AC)C^{-1} = 0,$$

car $CA = AC$...

7) On écrit à nouveau

$$\begin{aligned}
A(BA^{-1}B) &= A(BAB^{-1}A^{-1})A \\
&= (BAB^{-1}A^{-1})A^2 \quad \text{car } A \text{ et } BAB^{-1}A^{-1} \text{ commutent} \\
&= BAB^{-1}A.
\end{aligned}$$

Donc A et $BA^{-1}B$ commutent et donc sont simultanément diagonalisables d'après le théorème de Schurr rappelé dans l'énoncé.

8) Si $||I - M|| < 2$ alors en posant $M = (m_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$

$$\begin{aligned}
4 &> ||I - M||^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |1 - m_{ii}|^2 + \sum_{i\neq j} |m_{ij}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |1 - m_{ii}|^2 + 1 - |m_{ii}|^2 \ ,
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que la matrice M est unitaire. Mais on a

$$\begin{aligned}
|1 - m_{ii}|^2 + 1 - |m_{ii}|^2 &= 1 + |m_{ii}|^2 - 2\,\mathrm{Re}(m_{ii}) + 1 - |m_{ii}|^2 \\
&= 2(1 - \mathrm{Re}(m_{ii})).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$4 > 2\sum_{i=1}^{n}(1 - \mathrm{Re}(m_{ii})).$$

Mais comme

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(m_{ii}) \leq \sum_{i=1}^{n} |m_{ii}|,$$

on obtient en combinant les deux inégalités précédentes le résultat

$$\sum_{i=1}^{n} |m_{ii}| > n - 2.$$

Maintenant comme M est unitaire, chaque $|m_{ii}| \leq 1$ donc forcément $n-1$ sont non nuls (sinon on aurait $\sum_{i=1}^{n} |m_{ii}| \leq n-2$ ce qui est impossible d'après l'inégalité précédente).

9) On va essayer de montrer que A et B commutent. Pour cela, on a d'après 7) l'existence de U unitaire telle que

$$\begin{aligned}
A_D &= UAU^{-1} \ , \\
B_D &= U(BAB^{-1})U^{-1} \ ,
\end{aligned}$$

où A_D et B_D sont des matrices diagonales. On remarque par ailleurs que

$$\begin{aligned}
B_D &= (UBU^{-1})(UAU)(U^{-1}B^{-1}U) \\
&= (UBU^{-1})A_D(U^{-1}B^{-1}U) \\
&= (UBU^{-1})A_D(UBU^{-1})^{-1}.
\end{aligned}$$

Comme U et B sont unitaires, UBU^{-1} est unitaire donc d'après le résultat obtenu en 5), il existe P matrice de permutation telle que

$$B_D = P^{-1}A_DP = M^{-1}A_DM,$$

en posant $M = UBU^{-1}$.

Si on pose également $B_D = diag[b_i]_{1\leq i\leq n}$, on a , d'après la première égalité, l'existence d'une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$ tel que $A_D = diag[b_{\sigma(i)}]_{1\leq i\leq n}$. Par ailleurs la dernière égalité implique que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,

$$m_{ii}b_i = b_{\sigma(i)}m_{ii}.$$

Mais on a $||I - B|| = ||I - M|| < 2$ par hypothèse et en utilisant les résultats de 8) on sait que au moins $n-1$ éléments de la diagonales parmi les $m_{i,i}$ sont non nuls. On en déduit que la permutation σ vaut l'identité sur au moins $n - 1$ composantes. DONC sur toutes les composantes (sinon elle ne serait plus bijective). On en déduit donc $P = I = M$ et

$$\begin{aligned}
B_D &= A_D \\
&\Leftrightarrow UAU^{-1} = U(BAB^{-1})U^{-1} \\
&\Longleftrightarrow A = BAB^{-1} \\
&\Longleftrightarrow AB = BA.
\end{aligned}$$

En conclusion A et B commutent et sont donc simultanément diagonalisables.

10) D'après 4) on peut construire une suite de la forme B_k qui converge et même stationne en I. Eliminons d'abord le cas trivial $B = I$ auquel cas A et B commutent. Il existe alors d'après 4) $k \in \mathbb{N}$ tel que $B_k \neq I$ et tel que $B_{k+1} = I$

Supposons que $k \geq 1$ alors on a d'après 4)

$$||I - B_{k-1}|| \leq a^{k-1}||I - B|| \leq ||I - B|| < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$$

Donc si on pose $C = AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1}$ on a

$$\begin{aligned}
CA - AC &= (AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1})A - A(AB_{k-1}AB_{k-1}^{-1}) \\
&= B_kA - AB_k = (I - AB_kA^{-1}B_k^{-1})B_kA \\
&= (I - B_{k+1})B_kA \\
&= 0
\end{aligned}$$

par définition de k.

On en déduit que A et C commutent mais d'après les résultats de 7) et 9) on en déduit que $[A, B_{k-1}] = 0$ ce qui implique $B_k = I$, ce qui est contraire à la définition de k.

On en déduit donc que forcément $k = 1$ ce qui signifie $B_1 = I$ soit $AB = BA$.

11) Tout élément de $V_n(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme d'un produit fini de la forme

$$A_1A_2....A_p$$

avec $||I - A_j|| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $j = 1, ..p$. Si on prend deux matrices quelconques intervenant dans de telles décompositions, elles engendrent un sous-groupe fini par hypothèse donc d'après 10) elles commutent. On en déduit de manière itérative que toutes les matrice intervenant dans la décomposition des éléments du groupe commutent et donc que tout élément commute.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DU CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice n° 1

a) $C_{10}^{1} = 10$

b) $C_{18}^{2} = 153$

c) $C_{22}^{2} = 231$

d) $C_{30}^{3} = 4060$

e) 1.434.925.800 = 10 x 153 x 231 x 4060

Exercice n° 2

Un équivalent de la fonction f en $+\infty$ est $(1-m)x^{\frac{3}{2}}$ lorsque m est différent de 1.

On en déduit que si $m < 1$, la limite cherchée est $+\infty$ et que si $m > 1$, la limite cherchée est $-\infty$

Lorsque m est égal à 1, un équivalent de la fonction f en $+\infty$ est $(1-\frac{p}{2})x^{\frac{1}{2}}$ lorsque p est différent de la valeur 2.

On en déduit que si $p > 2$, la limite cherchée est $-\infty$ et que si $p < 2$, la limite cherchée est $+\infty$

Dernier cas : $m = 1$ et $p = 2$. L'équivalent de la fonction f en $+\infty$ est $\frac{3}{2}x^{\frac{-3}{2}}$.

On trouve alors une limite nulle.

Exercice n° 3

a) Soit g le taux de variation entre 1982 et 2002, alors on a par définition de celui-ci :
$3 = 1 (1 + g)$
D'où $g = 200$ %

b) Soit g_m le taux moyen annuel de variation entre 1982 et 2002, on doit avoir :
$(1 + g_m)^{20} = 3$
D'où $g_m = 5{,}647$ %

c) De la même façon qu'au a) , on trouve 6,67 %

d) Soit n le nombre d'années cherché, on a : $3{,}2 \times (1 + g_m)^n = 5$
D'où n = 8,26 soit 9 ans.

Exercice n° 4

Nous sommes en présence d'une moyenne harmonique. Soit H le résultat, on a :

$$\frac{2310}{H} = \frac{450}{200} + \frac{570}{150} + \frac{360}{180} + \frac{510}{300} + \frac{420}{210}$$

D'où H = 196,6 habitants/médecin

Exercice n° 5

a) En utilisant le fait que $i^2 = -1$, on trouve $z = \frac{(4i^{22} - i)^2}{(1+2i)^2} = -\frac{13}{25} - \frac{84}{25}i$

b) D'après la formule de Moivre, on a :
$(\cos a + i \sin a)^3 = \cos 3a + i\sin 3a$
D'où $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ et $\sin 3a = -4\sin^3 a + 3\sin a$

Exercice n° 6

	Décision correcte	Décision défectueuse	Total
Correct en réalité	0,99 x 0,95 = 0,9405	0,01 x 0,95 = 0,0095	0,95
Défectueux en réalité	0,10 x 0,05 = 0,0050	0,90 x 0,05 = 0,0450	0,05
Total	0,9455	0,0545	1

a) La probabilité pour que le contrôleur déclare un article quelconque défectueux est donc 5,45 %

b) La probabilité pour que le contrôleur se trompe en déclarant qu'un article est défectueux est une probabilité conditionnelle qui vaut 17,43 %

c) Le contrôleur prend une décision erronée dans 0,0095 + 0,0050 = 1,45 % des cas.

Exercice n° 7

A partir des développements limités connus, on trouve le développement limité suivant pour la fonction f :

$$f(x) = (1+b-a)\ x + (1/2-b^2+ab)\ x^2 + (1/6+b^3-ab^2)\ x^3 + o(x^3)$$

Pour déterminer a et b tels que le premier terme non nul soit le terme en x^3, il faut que (1+b-a) soit nul ainsi que $(1/2-b^2+ab)$. La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues donne comme résultat a=1/2 et b=-1/2

Pour conclure, il faut vérifier que le terme en x^3 ne soit pas nul. Ceci est vérifié puisque l'on trouve –1/12.